

# Seminar (Master HRGe): Numerik (L.105.74212)

Institut für Mathematik, Universität Paderborn, Sommersemester 2018

**Webseite:** <http://math.uni-paderborn.de/kerstin-hesse/lehre-und-lehrmaterialien/>

**Dozentin:** Dr. Kerstin Hesse

Büro: Gebäude D, Raum D1.217

Telefon: 2605 (intern), 05251 60-2605 (extern)

E-Mail: [kerstin.hesse@math.upb.de](mailto:kerstin.hesse@math.upb.de)

Webseite: <http://math.uni-paderborn.de/kerstin-hesse/>

**Sprechstunde (während der Vorlesungszeit):** Gebäude D, Raum D1.217, Mittwoch, 9:30-10:30 Uhr (oder nach Vereinbarung)

## Allgemeines:

- **Termin:** Mittwoch, 7:30–9:00 Uhr, D1.320
- In der ersten Vorlesungswoche findet **am 11.04.2018 um 8:15 Uhr in D1.320 die Vorbereitungsbesprechung mit der Themenvergabe** statt.
- Sie müssen regelmäßig am Seminar teilnehmen und einmal selber vortragen (s.u.), um Ihr Lernziel zu erreichen. Sie dürfen **maximal bei zwei Seminarterminen fehlen**.
- Am 13.06.2018 und am 20.06.2018 findet kein Seminartermin statt.

**Beschreibung:** In diesem Seminar beschäftigen wir uns mit Themen der Numerik, wobei wir sowohl numerische Methoden zum Lösen von Problemen der Analysis (z.B. numerische Integrationsverfahren) als auch numerische Methoden zum Lösen von Problemen der Linearen Algebra (z.B. Algorithmen zum Lösen linearer Gleichungssysteme) untersuchen.

**Literatur:** Als Literatur dient das Buch

[SH2015] B. Schuppar, H. Humenberger Elementare Numerik für die Sekundarstufe (Springer, 2015), welches gegebenenfalls noch durch weitere Literatur ergänzt wird. Das Buch gibt es als E-Book in der Uni-Bibliothek.

**Themen der Seminars:** Die 13 Themen sind in vier Themenblöcke untergliedert, wobei die Vortragsthemen innerhalb eines Blocks meist aufeinander aufbauen. Jedes Thema wird an **eine Gruppe von zwei Studierenden** vergeben, die zusammen einen Seminartermin durch einen Vortrag über ihr Thema gestalten. Dabei wird im Normalfall erwartet, **dass jede/r Studierende ca. 45 Minuten des Seminartermins gestaltet**.

## A. Grundlegende Fertigkeiten

A.1 Überschlagsrechnen

A.2 Rechnen mit ungenauen Zahlen

A.3 Fehlerfortpflanzung

A.4 Potenzen und Wurzeln ohne Werkzeug rechnen

## **B. Lösen von Gleichungen**

B.5 Rekursive Folgen

B.6 Lösen von Fixpunktgleichungen

B.7 Newton-Verfahren

## **C. Numerische Integration**

C.8 Numerische Integrationsformeln

C.9 Fehlerabschätzungen für numerische Integrationsformeln und Verbesserungen

## **D. Lösen von linearen Gleichungssystemen**

D.10 Wiederholung zur Linearen Algebra

D.11 Gauß Elimination

D.12 Kondition von Matrizen

D.13 Iterationsverfahren zur numerischen Integration

---

## **Genauere Beschreibung der Seminarthemen**

### **A. Grundlegende Fertigkeiten**

A.1 Überschlagsrechnen

Literatur: Teilkapitel 1.2 bis 1.3 aus [SH2015]

- einführendes kleines Beispiel zum Überschlagsrechnen
- Prinzipien und Strategien des Überschlagsrechnens
- Warum ist Überschlagsrechnen wichtig und sinnvoll?
- selbstgelöstes aufwendigeres Beispiel (z.B. aus Abschnitt 1.2.3)
- Faustregeln: einfache Beispiele
- Beispiel zu komplexen funktionalen Zusammenhängen

A.2 Rechnen mit ungenauen Zahlen

Literatur: Teilkapitel 2.2 bis 2.3 aus [SH2015]

- einführende Beispiele zum Rechnen mit ungenauen Zahlen
- einführende Beispiele zu Rechengesetzen beim Rechnen mit ungenauen Zahlen (untere und obere Schranken für das Ergebnis)
- absolute und relative Fehler, Fehlerschranken
- Rundungsfehler
- Gleitkommazahlen
- Regeln der Ziffernzählung

- kleines Beispiel zur Auslöschung führender Ziffern

### A.3 Fehlerfortpflanzung

Literatur: Teilkapitel 2.4 aus [SH2015]

- Intervallschachtelung (Theorie und Beispiele)
- Fehlerfortpflanzungsregeln bei Termen mit den Grundrechenarten (Theorie und Beispiele)
- Fehlerfortpflanzungsregeln bei Funktionen (Theorie und Beispiele)

### A.4 Potenzen und Wurzeln ohne Werkzeug rechnen

Literatur: Teilkapitel 3.1 und 3.2 (nur bis einschließlich 3.2.2) aus [SH2015]

- Wiederholung von Potenzen und von Potenzgesetzen
- sparsamer Algorithmus zum Potenzieren
- Wiederholung vom Logarithmus und seinen Rechengesetzen
- logarithmisch bei Potenzen mit sehr großem Exponenten rechnen
- Wiederholung zu Wurzeln
- Schätzen von Quadratwurzeln
- Wurzeln aus großen Quadratzahlen ohne Taschenrechner berechnen

## B. Lösen von Gleichungen

### B.5 Rekursive Folgen

Literatur: Teilkapitel 4.2 aus [SH2015], weiteres Basiswissen zu Folgen für die Grundbegriffe (Folge, monoton wachsend/fallend, alternierend bzw. oszillierend, intuitives Grenzwertverständnis)

- Definition einer Folge (reeller Zahlen), Beispiele dazu
- Definition einer rekursiven Folge (reeller Zahlen)
- Beispiele zu rekursiven Folgen mit verschiedenen Eigenschaften: strebt gegen einen Grenzwert, wird beliebig groß, pendelt zwischen verschiedenen Häufungswerten hin und her
- dabei verwendete Begriffe wie monoton fallend/wachsend, oszillierend, Häufungswerte einer Folge, Idee des Grenzwerts sollten dabei zumindest intuitiv erklärt werden (Sie dürfen den Grenzwert auch gerne formal definieren, aber auch dann müssen Sie die Anschauung erklären.)

### B.6 Lösen von Fixpunktgleichungen

Literatur: Teilkapitel 4.3 aus [SH2015]

- Fixpunktgleichung (Begriff und Beispiele)
- Iteration linearer Funktionen untersuchen
- Iteration bei einer anderen Art von Funktion
- Banachscher Fixpunktsatz mit Beweis
- Satz zur Klassifikation von Fixpunkten

### B.7 Newton-Verfahren

Literatur: Teilkapitel 4.4 aus [SH2015]

- Herleitung des Newton-Verfahrens

- Beispiele zum Newton-Verfahren
- Satz über die lokale Konvergenz des Newton-Verfahrens mit Beweis
- Satz über hinreichende Bedingung für globale Konvergenz
- optional: Newton-Verfahren bei mehrfachen Nullstellen

## C. Numerische Integration

### C.8 Numerische Integrationsformeln

Literatur: Teilkapitel 5.1 bis 5.3 und 5.5.1 aus [SH2015]

- Motivation/grundsätzliche Problematik
- Rechteckformeln (vorstellen und erklären)
- Fehlerabschätzungen bei Rechteckformeln mit Beweis
- Mittelpunktformel (vorstellen und erklären)
- Trapezformel (vorstellen und erklären)
- zu mindestens einer der Formeln ein numerisches Zahlenbeispiel
- Zusammenhang zwischen Mittelpunkt und Trapezformel

### C.9 Fehlerabschätzungen für numerische Integrationsformeln und Verbesserungen

Literatur: Teilkapitel 5.5 aus [SH2015]

- Fehlerabschätzungen bei der Mittelpunktformel mit Beweis
- Fehlerabschätzungen bei der Trapezformel mit Beweis
- Verbesserte Mittelpunkt- und Trapezformeln

## D. Lösen von linearen Gleichungssystemen

### D.10 Wiederholung zur Linearen Algebra

Literatur: z.B. Kapitel 10 und 11 meines Skripts „Mathematik für Chemiker“

- Vektoraddition im  $\mathbb{R}^n$  und skalare Multiplikation in  $\mathbb{R}^n$
- euklidische Norm von  $\mathbb{R}^n$
- Matrix-Vektor-Multiplikation
- Schreiben eines linearen Gleichungssystems (LGS) mit Matrix-Vektor-Multiplikation
- Matrizenaddition und skalare Multiplikation für Matrizen
- Matrizenprodukt/Matrix-Matrix-Multiplikation

### D.11 Gauß Elimination

Literatur: Teilkapitel 6.2 aus [SH2015]

- Schreiben von LGS mit Matrix-Vektor-Multiplikation (Wiederholung) und danach mit der erweiterten Koeffizientenmatrix
- Gaußsches Eliminationsverfahren erklären und am Beispiel vorführen
- Wie viele Rechenoperationen benötigt man? Warum?
- Was kann alles schief gehen? (auch an Beispiel zeigen)
- Pivotsuche und vollständige Pivotsuche

- weitergehende Frage zur linearen Algebra: Welche Fälle können theoretisch auftreten bei  $n$  Gleichungen mit  $n$  (oder  $m$ ) Unbekannten?

#### D.12 Kondition von Matrizen

Literatur: Teilkapitel 6.3 aus [SH2015]

- Motivation/Fragestellung
- euklidische Norm (Wiederholung) und Matrix-Norm
- Normabschätzung bei Matrix-Vektormultiplikation
- absoluter und relativer Fehler
- Exkurs: inverse Matrix, Zusammenhang mit Lösung des LGS
- Konditionszahl einer Matrix
- Überlegungen zur Änderung der Kondition bei Umformungen eines LGS

#### D.13 Iterationsverfahren zur numerischen Lösung linearer Gleichungssysteme

Literatur: Teilkapitel 6.4 aus [SH2015]

- Jacobi-Verfahren (mit Herleitung)
- Gauß-Seidel-Verfahren (mit Herleitung)
- Veranschaulichung der Konvergenz der Iteration im Zweidimensionalen
- Untersuchung der Konvergenz beim Jacobi-Verfahren
- Diagonaldominanz