

7. Übungsblatt

Funktionentheorie

WS 2006/2007

Prof. Dr. K.-H. Indlekofer

Abgabe: Montag oder Dienstag, den 8.01.2007 bzw 9.01.2007 in den Übungen.

Aufgabe 7.1.

Man berechne $\operatorname{Res}_{z_0} f$ für

$$f(z) = \frac{z^3}{(z-1)^2}, \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}, z_0 := 1).$$

Aufgabe 7.2.

Man bestimme das folgende Integral für alle $x > 0, \sigma > 0$:

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{x^z}{z^2} dz.$$

(Hinweis:

Für $x < 1$: Man integriere x^z/z auf dem Weg $(\sigma - iR, \sigma + iR) \dot{+} (|\sigma - z| = R, \operatorname{Re} z \geq \sigma)$, also auf dem Geradenstück zwischen $\sigma - iR$ und $\sigma + iR$, vereinigt mit dem rechtsseitigen Halbkreis mit Mittelpunkt σ und mit Radius R . Dann läßt man R gegen Unendlich streben.

Für $x \geq 1$: Man integriere auf dem gleichen Geradenstück, vereinigt mit dem linksseitigen Halbkreis.)

Aufgabe 7.3.

Sei Ω ein Gebiet, das durch \exp biholomorph auf $D(1, 1)$ abgebildet wird (es gibt viele derartige Gebiete). Man definiere $\log z$ für $|z-1| < 1$ durch $\log z = w \in \Omega$ mit $e^w = z$.

1. Man zeige $\log' z = 1/z$.
2. Man bestimme die Koeffizienten a_n von

$$\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^n$$

3. Mit Hilfe von 2. gebe man die Koeffizienten c_n in der Entwicklung

$$\log z = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-1)^n$$

an.