2.Übungsblatt zu

Einführung in die Zahlentheorie

SS 2006
Prof. Dr. K.-H. Indlekofer

Abgabe: Donnerstag, den 04.05.2006 in der Vorlesung.
Bemerkung: die Lösungswege müssen ersichtlich sein!

Aufgabe 2.1.
Im Polynomring $\mathbb{R}[x]$ berechne man einen größte gemeinsammen Teiler von

$$f(x) = x^5 + x^3 + x^2 + 2x + 1$$

und

$$g(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1.$$

Aufgabe 2.2.
Wir definieren eine Funktion N auf $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ durch

$$N(f) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } f = 0, \\ \frac{1}{k} & \text{wenn } k \text{ die kleinste Zahl, für die } f(k) \neq 0 \text{ ist.} \end{cases}$$

Man zeige $N(f * g) = N(f)N(g)$ für alle zahlentheoretischen Funktionen f und g und folgere, daß $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +, *)$ ein Integritätsbereich ist.

Aufgabe 2.3.
Man zeige, daß $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ ein euklidischer Ring ist.

Aufgabe 2.4.
Für alle positive ganze Zahl N bezeichne I_N die Menge aller arithmetischen Funktionen $f(n)$ so daß $f(n) = 0 \ \forall n \leq N$. Zeige, daß I_N ein Ideal im Ring der arithmetischen Funktionen ist.

Aufgabe 2.5
Sei $f(n) = 1$ für $n \geq 4$ und Null sonst. Man beweise, daß f irreduzibel in $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +, *)$ ist.