5.Übungsblatt zu

Einführung in die probabilistische Zahlentheorie

WS 2005/2006
Prof. Dr. K.-H. Indlekofer

Abgabe: Montag, den 6.2.2006 um 14:00 im Büro D1.204.

Aufgabe 5.1.
Für die Funktion Δ:

$$\Delta = 2x + \Bigg(\sum\sum_{\substack{p^k q^l \le x \\ p \ne q}} p^k q^l\Bigg)^{1/2} + 4\Bigg(\sum_{p^k \le x} \frac{1}{p^k} \sum_{q^l \le x} q^l\Bigg)^{1/2},$$

die bei der Turán-Kubilius Ungleichung vorgekommen ist, beweisen Sie die folgende Formel:

$$\Delta = 2x + O\Big(x\Big(\frac{\log\log x}{\log x}\Big)^{1/2}\Big)$$

für $x \to \infty$.

Benutze dazu die folgende zwei Lemmas:
Lemma 1. Die folgende Aussagen gelten für $x \ge 2$,

$$\sum_{p \le x} \frac{\log p}{p} = \log x + O(1),$$

$$\sum_{p \le x} \frac{1}{p} = \log\log x + B + O\Big(\frac{1}{\log x}\Big),$$

$$\prod_{p \le x} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big) = \frac{e^{-\gamma}}{\log x}\Big\{1 + O(\frac{1}{\log x})\Big\}.$$

Lemma 2. Sei α eine reelle Zahl mit $0 \le \alpha < 1$. Dann existiert eine reelle Zahl c_1, die eventuell von α abhängt, so dass die Ungleichung:

$$\pi(x, D, l) \le \frac{c_1 x}{\varphi(D) \log x}$$

gilt gleichmäßig für alle reelle Zahlen $x \ge 2$, und ganze Zahlen l, und D mit $1 \le D \le x^\alpha$. Hierbei bezeichnet $\pi(x.D, l)$ die Anzahl der Primzahlen unter x mit der Eigenschaft $p \equiv l($ mod $D)$.

Aufgabe 5.2. siehe extra Kopien