3.Übungsblatt zu

Einführung in die probabilistische Zahlentheorie

WS 2005/2006
Prof. Dr. K.-H. Indlekofer

Abgabe: Montag, den 5.12.2005 um 14:00 im Büro D1.204.

Aufgabe 3.1.
Man zeige

$$\sum_{a=1}^{q} \exp\Big(2\pi i \frac{a}{q} s\Big) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } q \nmid s, \\ q & \text{, falls } q \mid s. \end{cases}$$

Aufgabe 3.2.
Die q-periodische Funktion f sei Linearkombination der Exponentialterme

$$n \mapsto \exp\Big(2\pi i \frac{a}{q} n\Big) \qquad (a = 1, \ldots, q)$$

d.h.

$$f(n) = \sum_{a=1}^{q} d_a \cdot \exp\Big(2\pi i \frac{a}{q} n\Big).$$

Man zeige, dass die Koeffizienten d_a sich dann auf folgender Weise berechnen lassen:

$$d_a = \frac{1}{q} \sum_{m=1}^{q} f(m) \exp\Big(-2\pi i \frac{a}{q} m\Big).$$

Aufgabe 3.3.
Eine *Ramanujan-Summe* c_q, ist definiert durch

$$c_q(n) = \sum_{\substack{a=1 \\ ggT(a,q)=1}}^{q} \exp\Big(2\pi i \frac{a}{q} n\Big).$$

Man zeige, dass gilt:

$$c_q(n) = \sum_{d|q} \mu(d) F\Big(\frac{q}{d}\Big)$$

mit

$$F(t) = c_q(n) = \sum_{a'=1}^{t} \exp\Big(2\pi i \frac{a'}{t} n\Big).$$

Aufgabe 3.4.
Man zeige, dass die Abbildung $c.(n)$, definiert durch $q \mapsto c_q(n)$, sich als Faltung

$$c.(n) = \mu * F$$

zweier multiplikativer Funktionen darstellen lässt.