2.Übungsblatt zu

Einführung in die probabilistische Zahlentheorie

WS 2005/2006
Prof. Dr. K.-H. Indlekofer

Abgabe: Montag, den 21.11.2005 in der Übung.

Aufgabe 2.1.
Durch vollständige Induktion zeige man

$$\prod_{p \leq n} p < 4^n.$$

$\Big($Hinweis: (i) O.B.d.A. sei n ungerade.
(ii) Alle Primzahlen p mit $k+2 \leq p \leq 2k+1$ gehen in $\binom{2k+1}{k} = \frac{(k+2)\cdots(2k+1)}{k!}$ auf.
(iii) $2^{2k+1} \geq \binom{2k+1}{k} + \binom{2k+1}{k+2} = 2 \cdot \binom{2k+1}{k}\Big)$.

Aufgabe 2.2.

a) Man zeige: Es existiert eine Zahl B derart, dass für jedes $x > 1$ eine Primzahl zwischen x und $B \cdot x$ liegt.

b) Man beweise das *Bertrandsche Postulat*:

$$\pi(2n) - \pi(n) \geq 1 \text{ für alle n} \geq 1.$$

(Hinweis: Sei $P_n = \prod_{n \leq p \leq 2n} p$ und $\binom{2n}{n} = P_n Q_n$.

i) $p > 2n/3 \Rightarrow p \nmid Q_n$.

ii) Zeige die folgende Formel

$$Q_n \leq 4^{2n/3} \cdot (2n)^{\sqrt{n/2}},$$

mit der Hilfe des folgenden Satzes:
Die kanonische Darstellung von $n!$ ist

$$n! = \prod_{p \leq n} p^{e_p}, \text{ wobei } e_p = \sum_{m \geq 1} [n/p^m] \text{ ist.}$$

iii) Zeige $\binom{2n}{n} > \frac{4^n}{2\sqrt{n}}$ durch vollständige Induktion.)

c) Man verwende aus b) die Abschätzung

$$p_n > \frac{4^{n/3}}{2\sqrt{n}(2n)^{2\sqrt{n/2}}} \text{ für n} \geq 32$$

und beweise

$$\frac{n}{3\log 2n} < \pi(2n) - \pi(n) < \frac{7n}{5\log n} \text{ für n} > 1.$$

Aufgabe 2.3.
Man beweise, dass die n-te Primzahl p_n die Ungleichungen

$$\frac{1}{6} n\log n < p_n < 12\Big(n\log n + n\log\frac{12}{e}\Big)$$

erfüllt.
(Hinweis: Man verwende dazu, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 2$:

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{n}{\log n} < \pi(n) < 6\cdot\frac{n}{\log n}$$

gilt.)