# Graduierte Faktorialität und die Parameterkurven tubularer Familien

Dissertation
zur
Erlangung des Doktorgrades
des
Fachbereichs Mathematik-Informatik
der
Universität-Gesamthochschule Paderborn

vorgelegt von
Dirk Kussin

Paderborn 1997

| | |
|---|---|
| **Gutachter:** | Prof. Dr. Helmut Lenzing<br>PD Dr. Luise Unger<br>Prof. Dr. Dieter Happel |
| **Tag der Promotion:** | 17. Oktober 1997 |

# Inhaltsverzeichnis

# Einleitung

Diese Arbeit befaßt sich mit der Charakterisierung von graduiert faktoriellen Algebren der Krulldimension zwei, die affin sind über einem Körper $k$, und den Auswirkungen auf die Darstellungstheorie von endlichdimensionalen $k$-Algebren. Wir beschränken unsere Untersuchungen auf *kommutative* graduiert faktorielle Algebren. Wir beschreiben einen Zusammenhang zwischen dem Konzept der graduierten Faktorialität und gewissen separierenden tubularen Familien von stabilen Röhren einer endlichdimensionalen $k$-Algebra $\Sigma$.

Eine separierende tubulare Familie $\mathrm{mod}_0(\Sigma)$ ist ein Coprodukt

$$\coprod_{x \in \mathbb{X}} \mathcal{U}_x$$

aus zusammenhängenden, einreihigen Kategorien $\mathcal{U}_x$, sogenannten Röhren, in denen jedes Objekt von endlicher Länge ist. Die Röhren haben nur endlich viele einfache Objekte (die im Mund der Röhre liegen), und fast alle Röhren haben genau ein einfaches Objekt. Röhren mit nur einem einfachen Objekt heißen homogen. Eine solche tubulare Familie trennt die Modulkategorie $\mathrm{mod}(\Sigma)$ in drei Teile $\mathrm{mod}_+(\Sigma)$, $\mathrm{mod}_0(\Sigma)$ und $\mathrm{mod}_-(\Sigma)$ mit folgenden Eigenschaften:

- $\mathrm{mod}_+(\Sigma)$ enthält alle projektiven Moduln, $\mathrm{mod}_-(\Sigma)$ enthält alle injektiven Moduln;
- es gilt $\mathrm{Hom}_\Sigma(\mathrm{mod}_-(\Sigma), \mathrm{mod}_0(\Sigma)) = 0$, $\mathrm{Hom}_\Sigma(\mathrm{mod}_0(\Sigma), \mathrm{mod}_+(\Sigma)) = 0$ sowie $\mathrm{Hom}_\Sigma(\mathrm{mod}_-(\Sigma), \mathrm{mod}_+(\Sigma)) = 0$;
- jeder Morphismus $f \in \mathrm{Hom}_\Sigma(M, N)$, wobei $M \in \mathrm{mod}_+(\Sigma)$ und $N \in \mathrm{mod}_-(\Sigma)$ gilt, faktorisiert durch eine beliebig vorgegebene Röhre $\mathcal{U}_x$.

In dem obigen Coprodukt ist $\mathbb{X}$ eine zunächst nicht weiter bekannte Indexmenge. Unser Ziel ist, mit Hilfe der graduierten Faktorialität $\mathbb{X}$ mit einer Geometrie auszustatten und diese im Detail zu untersuchen.

Algebren mit einer separierenden tubularen Familie sind Gegenstand zahlreicher Untersuchungen. Einen Überblick findet man in [**41**]. Spezialfälle solcher Algebren sind die zahm-erblichen Algebren [**10, 38, 12, 11, 8**] (insbesondere die zahm-erblichen Bimodulalgebren), die versteckt-zahmen Algebren [**39**], die tubularen Algebren [**39, 21, 34**], die kanonischen Algebren [**39, 18, 40**]. In [**32**] werden die Algebren mit einer separierenden tubularen Familie charakterisiert; es handelt sich um die versteckt-kanonischen Algebren.

Zur Untersuchung der Indexmenge kann man bis auf einen Prozeß der sogenannten Einfügung bzw. Reduktion von Gewichten annehmen, daß die $k$-Algebra $\Sigma$ eine zahm-erbliche Bimodulalgebra, also eine $k$-Algebra von der Form

$$\begin{pmatrix} F & 0 \\ M & G \end{pmatrix}$$

ist, wobei $F$ und $G$ endlichdimensionale Schiefkörper über $k$ sind, und $M = {}_G M_F$ ein Bimodul ist mit $[M : G] \cdot [M : F] = 4$, so daß $k$ zentral operiert. In diesem Fall hat jedes $\mathcal{U}_x$ genau ein einfaches Objekt, d. h. jede Röhre ist homogen. Generell ist für diese zahm-erblichen Bimodulalgebren die Beschreibung der Geometrie von $\mathbb{X}$ ein offenes Problem. Die Arbeiten [**10, 38, 8**] beschreiben diese Geometrie nur in Teilaspekten.

Über algebraisch abgeschlossenem Körper ist die Geometrie der Parameterkurven der separierenden tubularen Familien sehr gut verstanden. Denn Geigle-Lenzing zeigten, daß diese Indexmengen exakt die von ihnen eingeführten gewichteten projektiven Geraden $\mathbb{X}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda})$ sind [**18**]. Hierbei ist $\mathbf{p}$ eine Folge von Gewichten $p_1, \ldots, p_t$ und $\boldsymbol{\lambda}$ eine Folge von verschiedenen Punkten $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ auf der projektiven Geraden. Die gewichteten projektiven Geraden sind die graduierten projektiven Spektren gewisser graduiert faktorieller Algebren $\mathbb{S}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda})$, in denen die homogenen Primelemente alle bekannt sind. Eine solche Algebra ist graduiert durch eine endlich erzeugte abelsche Gruppe vom Rang 1, die i. a. nicht torsionsfrei ist; sie ist genau dann torsionsfrei, wenn die Gewichte $p_1, \ldots, p_t$ paarweise teilerfremd sind.

Ausgangspunkt für unsere Untersuchungen ist dieser algebraisch abgeschlossene Fall und der Zugang von Geigle und Lenzing über die graduiert faktoriellen Algebren $\mathbb{S}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda})$. Hier hat S. Mori [**37**] folgendes gezeigt: Jede positiv $\mathbb{Z}$-graduiert faktorielle, affine $k$-Algebra der Krulldimension zwei ist als graduierte Algebra isomorph zu einer Algebra $\mathbb{S}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda})$, wobei die Gewichte in der Folge $\mathbf{p}$ paarweise teilerfremd sind. Die hierbei auftretenden Eigenschaften sind zur Verallgemeinerung auf beliebige Grundkörper geeignet. Daher ist es wichtig, den Satz von Mori so auf gruppengraduierte Algebren auszudehnen, daß er für *alle* $\mathbb{S}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda})$ (d. h. mit beliebigen Gewichten, die nicht notwendig paarweise teilerfremd sind) gültig ist. Wir werden in Theorem 1 zeigen, daß jede durch eine endlich erzeugte abelsche Gruppe vom Rang 1 graduierte faktorielle $k$-Algebra, die affin ist und Krulldimension zwei hat, als graduierte Algebra zu einem $\mathbb{S}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda})$ isomorph ist.

Um zu zeigen, daß eine solche graduiert faktorielle Algebra $R$ die spezielle Form $\mathbb{S}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda})$ hat, ordnen wir $R$ eine nicht-singuläre Kurve $\mathbb{X}$ zu, das graduierte projektive Spektrum. Die Kategorie der graduierten kohärenten Garben enthält eine durch $\mathbb{X}$ indizierte tubulare Familie von stabilen Röhren. Theorem 1 wird dann, ähnlich wie in [**37**], in zwei Schritten bewiesen: Zunächst untersuchen wird die sogenannte *homogene* Situation. Dies ist der Fall, wenn alle auftretenden Röhren homogen sind. Wir zeigen, daß in diesem Spezialfall $R$ schon die $\mathbb{Z}$-graduierte Polynomalgebra $k[X, Y]$ sein muß. Der allgemeine Fall wird dann durch sogenannte Gewichtsreduktion bewiesen.

In den nächsten beiden Kapiteln geht es dann um die Verallgemeinerung von Theorem 1 auf beliebige Grundkörper, wobei wir $\operatorname{char} k \neq 2$ voraussetzen. Wiederum ist das eigentliche Problem (bis auf Gewichtsreduktion bzw. -einfügung) die Klassifizierung im homogenen Fall. Wir zeigen, daß im homogenen Fall unter der zusätzlichen Annahme, daß das Geschlecht der Kurve $\mathbb{X}$ gleich null ist, neben $k[X, Y]$ nur *ein* weiterer Typ von graduierten Algebren hinzukommt. Es handelt sich um die durch Totalgrad graduierten Algebren $k[X,Y,Z]/Q$, wobei $Q$ eine anisotrope ternäre quadratische Form über $k$ ist (Theorem 5). Die Voraussetzung über das Geschlecht von $\mathbb{X}$ ist automatisch erfüllt, wenn $k$ algebraisch abgeschlossen ist, und ist ferner in den Situationen, die von darstellungstheoretischem Interesse sind (Existenz von Kippbündeln auf $\mathbb{X}$), ebenfalls erfüllt.

Die graduierten Algebren der Form $k[X,Y,Z]/Q$ untersuchen wir im zweiten Kapitel. Wir beschreiben, daß die klassische Bijektion zwischen den Quaternionenalgebren über $k$ und den ternären quadratischen Formen über $k$, die einer Quaternionenalgebra deren Normform der reinen Quaternionen zuordnet, eine darstellungstheoretische Interpretation hat (Theorem 2):

Dazu zeigen wir, daß die kleine präprojektive Algebra der zahm-erblichen Bimodulalgebra der Form

$$\Lambda_F = \begin{pmatrix} k & 0 \\ F & F \end{pmatrix},$$

mit einem Quaternionenschiefkörper $F$ über $k$, als graduierte Algebra isomorph zu $k[X,Y,Z]/Q$ ist, wobei $Q$ die zu $F$ gehörige anisotrope quadratische Form ist.

Umgekehrt wird zu einer anisotropen quadratischen Form $Q$ das projektive Spektrum $\mathbb{X}$ der graduiert faktoriellen Algebra $k[X,Y,Z]/Q$ gebildet; dann ist der Endomorphismenring des Auslander-Bündels $\mathcal{A}$ ein Quaternionenschiefkörper mit zugehöriger Normform $Q$. Das Auslander-Bündel ist der Mittelterm in der Auslander-Reiten-Folge

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{O}(1) \longrightarrow 0,$$

welche in der Strukturgarbe $\mathcal{O}$ beginnt.

Dabei ist eine kleine präprojektive Algebra einer zahm-erblichen Algebra $\Lambda$ wie folgt definiert ([**5**]): Sei $L$ ein präprojektiver, unzerlegbarer $\Lambda$-Modul vom Rang 1 (=Defekt $-1$). Dann trägt

$$\Pi(\Lambda, L) := \bigoplus_{n \geq 0} \mathrm{Hom}_\Lambda(L, \tau^{-n} L)$$

die Struktur einer $\mathbb{Z}$-graduierten $k$-Algebra (hierbei ist $\tau^- = \mathrm{Tr}\,\mathrm{D}$ die Auslander-Reiten-Translation). Sie hängt nur von dem Auslander-Reiten-Orbit von $L$ ab, und heißt eine kleine präprojektive Algebra von $\Lambda$. Für obiges $\Lambda_F$ gibt es nur einen Auslander-Reiten-Orbit von präprojektiven Moduln vom Rang 1.

Als Anwendung können wir zeigen, daß die $k$-Algebren von der Form

$$\begin{pmatrix} K & 0 \\ F & F \end{pmatrix}$$

(wobei $K$ eine endliche Körpererweiterung von $k$ und $F$ ein Quaternionenschiefkörper über $K$ ist) bis auf Dualisierung neben den Kronecker-Algebren über $K$ die einzigen zahm-erblichen Bimodulalgebren über $k$ sind, die eine *kommutative* kleine präprojektive Algebra besitzen, die also von der Form $K[X,Y]^{(2)}$ bzw. $K[X,Y,Z]/Q$ sind (Theorem 4).

Diese Resultate zeigen aber auch, daß man, anders als für algebraisch abgeschlossenen Körper, mit kommutativen graduiert faktoriellen Algebren nicht mehr alle separierenden tubularen Familien beschreiben kann. Um mehr zu erreichen, müßte man das Konzept der Faktorialität ausdehnen auf nicht-kommutative Algebren.

Im vierten Kapitel untersuchen wir für nicht notwendig algebraisch abgeschlossenen Körper $k$ speziell die Darstellungstheorie der tubularen Algebren (vgl. [**39, 34**] für den algebraisch abgeschlossenen Fall). Hier liegt eine rationale Schar von separierenden tubularen Familien vor. Im algebraisch abgeschlossenen Fall ist bekannt, daß alle diese tubularen Familien als Kategorien isomorph sind. Wir erhalten das überraschende Resultat, daß (von einem Spezialfall abgesehen, wo die Sachlage noch nicht völlig geklärt ist) über einer tubularen $k$-Algebra $\Sigma$ maximal zwei Typen von separierenden tubularen Familien vorkommen können, die jeweils eine rationale Schar bilden, deren Indexmenge dicht liegt in der Indexmenge der rationalen Schar aller tubularen Familien über $\Sigma$. Wir illustrieren die Sachlage an zwei tubularen kanonischen Algebren $\Lambda_1$ und $\Lambda_2$ über den reellen Zahlen, die beide realisiert werden als Kippbündel in derselben Kategorie der graduierten kohärenten Garben $\operatorname{coh}(\mathbb{X})$, gebildet zur graduiert faktoriellen Algebra

$$R = \mathbb{R}[X, Y, Z]/(X^2 + Y^4 + Z^4);$$

hierbei ist $R$ graduiert durch die von $\vec{x} = \operatorname{grad} X$, $\vec{y} = \operatorname{grad} Y$ und $\vec{z} = \operatorname{grad} Z$ erzeugte abelsche Gruppe mit Relationen $\vec{x} = 2\vec{y} = 2\vec{z}$. Jede dieser beiden kanonischen Algebren besitzt zwei Isomorphieklassen von separierenden tubularen Familien stabiler Röhren.

Die graduiert faktorielle $\mathbb{R}$-Algebra $R$ geht durch sogenanntes Einfügen von Gewichten aus der $\mathbb{Z}$-graduiert faktoriellen $\mathbb{R}$-Algebra $\mathbb{R}[X, Y, Z]/(X^2+Y^2+Z^2)$ hervor, welche die kleine präprojektive Algebra zu der Bimodulalgebra

$$\begin{pmatrix} \mathbb{R} & 0 \\ \mathbb{H} & \mathbb{H} \end{pmatrix}$$

ist, wobei $\mathbb{H}$ der Quaternionenschiefkörper über $\mathbb{R}$ ist.

Grundlegend für unsere Untersuchungen ist die in [**32**] durchgeführte Konstruktion von Mutationen auf der derivierten Kategorie einer versteckt-kanonischen Algebra $\Sigma$ sowie die Bildung einer Kategorie von kohärenten Garben $\operatorname{coh}(\mathbb{X})$ über einer exzeptionellen Kurve $\mathbb{X}$ (vgl. [**31**]), die einer separierenden tubularen Familie $\operatorname{mod}_0(\Sigma)$ zugeordnet wird. Hierbei ist $\mathbb{X}$ die Parametermenge in der Zerlegung $\operatorname{mod}_0(\Sigma) = \coprod_{x\in\mathbb{X}} \mathcal{U}_x$.

Sind nun $\mathbb{X}_1$ bzw. $\mathbb{X}_2$ die exzeptionellen Kurven, die den "zentralen" separierenden tubularen Familien der tubularen kanonischen $\mathbb{R}$-Algebren $\Lambda_1$ bzw. $\Lambda_2$ zugeordnet werden, so zeigen unsere obigen Ergebnisse, daß $\operatorname{coh}(\mathbb{X}_1)$ und $\operatorname{coh}(\mathbb{X}_2)$ *nicht* äquivalent sind, aber *deriviert* äquivalent, ein interessantes Phänomen, welches zeigt, daß eine Kurve i. a. nicht durch ihre derivierte Kategorie bestimmt ist (dies ist ein Gegenbeispiel zu einer in [**7**] über algebraisch abgeschlossenem Körper gestellten Frage).

Anhang A versorgt uns mit dem nötigen K-theoretischen Unterbau. Aufbauend auf [**30**] werden hier die Grothendieck-Gruppen, insbesondere die der tubularen Algebren, genauer unter die Lupe genommen. Für die oben beschriebenen Effekte bei tubularen Algebren zeichnet im wesentlichen die Klassifikation der Grothendieck-Gruppen der tubularen Algebren, wie wir sie im Anhang A vornehmen, verantwortlich. Neben dieser Klassifikation werden auch die Indexmengen der jeweiligen rationalen Scharen in jedem der einzelnen Fälle aufgelistet.

Die u. E. besonders wichtigen Ergebnisse dieser Arbeit haben wir "Theorem" genannt und einfach durchnumeriert. Sie befinden sich auf den folgenden Seiten:



Wenn nicht anderes gesagt wird, so bedeutet "Modul" in dieser Arbeit stets "Rechtsmodul".

An dieser Stelle möchte ich mich ganz herzlich bedanken bei Herrn Prof. Dr. Helmut Lenzing für zahlreiche Anregungen und stetige Unterstützung. Desweiteren gilt mein Dank dem Land Nordrhein-Westfalen, das meine Arbeit zwei Jahre lang mit einem Graduiertenstipendium gefördert hat.

KAPITEL 1

# Graduiert faktorielle Algebren, algebraisch abgeschlossener Fall

## 1.1. Das Resultat

In diesem ersten Kapitel nehmen wir stets an, daß der Grundkörper $k$ algebraisch abgeschlossen ist (dies wird allerdings nur in diesem und in den Abschnitten 1.6, 1.8 eine Rolle spielen). Wir werden zeigen, daß der Begriff der graduierten Faktorialität bestens geeignet ist, die Geometrie der Indexmengen der separierenden tubularen Familien der versteckt-kanonischen Algebren zu beschreiben. Ausgangspunkt der Untersuchungen sind dabei zwei wesentliche Bestandteile:

- Geigle und Lenzing zeigen, daß die Indexmenge der "zentralen" separierenden tubularen Familie einer kanonischen Algebra eine gewichtete projektive Gerade $\mathbb{X}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda})$ ist [**18**]. Hierbei ist $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_t)$ eine Folge von natürlichen Zahlen $p_i \geq 1$ (üblicherweise $p_i \geq 2$), welche *Gewichte* genannt werden und gerade die Ränge der Ausnahmeröhren sind, und $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_t)$ ist eine sogenannte *Parameterfolge*, wobei die $\lambda_i \in \mathbb{P}^1(k)$ paarweise verschiedene Elemente sind; o. E. nehmen wir $\lambda_1 = \infty$ und $\lambda_2 = 0$ an. Die gewichtete projektive Gerade $\mathbb{X}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda})$ ist das graduierte projektive Spektrum der graduierten affinen $k$-Algebra
$$\mathbb{S}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda}) = k[X_1, \ldots, X_t]/(f_3, \ldots, f_t),$$
wobei
$$f_i = X_i^{p_i} - X_2^{p_2} + \lambda_i X_1^{p_1} \quad (i = 3, \ldots, t)$$
gilt. Die Algebren sind durch eine endlich erzeugte abelsche Gruppe $\mathbb{L}(\mathbf{p})$ vom Rang 1 graduiert, die definiert ist durch Erzeugende $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_t$ und Relationen
$$p_1\vec{x}_1 = \cdots = p_t\vec{x}_t;$$
die Graduierung kommt dann zustande, indem man $\operatorname{grad} X_i = \vec{x}_i$ setzt. Die Gruppen $\mathbb{L}(\mathbf{p})$ sind i. a. nicht torsionsfrei; sie sind es genau dann, wenn die Gewichte $p_i$ paarweise teilerfremd sind. Die Algebren $\mathbb{S}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda})$ sind graduiert faktoriell, und die homogenen Primelemente können explizit angegeben werden [**18**].
- Als weiteren Ausgangspunkt haben wir den folgende Satz von S. Mori aus dem Jahre 1977 [**37**], den wir hier in der Sprechweise von [**18**] zitieren:

Satz 1.1.1. *Sei $R$ eine positiv $\mathbb{Z}$-graduierte affine $k$-Algebra mit $R_0 = k$, die graduiert faktoriell ist, Krulldimension zwei hat, und so, daß die Gruppe $\mathbb{Z}$ erzeugt wird von der Menge aller $n \in \mathbb{Z}$ mit $R_n \neq 0$. Dann ist $R$ als*

*$\mathbb{Z}$-graduierte Algebra isomorph zu $\mathbb{S}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda})$, wobei $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_t)$ eine Folge paarweise teilerfremder Gewichte ist und $\boldsymbol{\lambda}$ eine Parameterfolge.* □

Aus diesen beiden Daten ergibt sich die Frage, ob und wie Moris Satz auf beliebige Gewichtsfolgen ausgedehnt werden kann. Denn aus darstellungstheoretischer Sicht stellt Moris Satz eine erhebliche Einschränkung dar. In den folgenden Abschnitten zeigen wir, daß Moris Satz in der Tat auf beliebige Gewichtsfolgen ausgedehnt werden kann. Dabei betrachten wir die folgende Klasse von graduiert faktoriellen Algebren:

Es sei $H$ eine endlich erzeugte abelsche Gruppe vom Rang 1, und $R$ sei eine kommutative $H$-graduierte $k$-Algebra $R = \bigoplus R_h$, die folgende Eigenschaften hat:

**(F1):** $R$ ist graduiert faktoriell.
**(F2):** $R$ hat graduierte Krulldimension zwei.
**(F3):** $R$ ist eine affine $k$-Algebra mit $R_0 = k$ und so, daß jede homogene Einheit in $R$ den Grad 0 hat; (ohne Einschränkung) werde $H$ vom Träger von $R$ erzeugt.

*Graduiert faktoriell* heißt, daß $R$ graduiert integer (d. h. das Produkt zweier *homogener* Elemente $\neq 0$ ist $\neq 0$) und jedes homogene Element $\neq 0$ Produkt von homogenen Primelementen ist. Unter einer *affinen* $k$-Algebra verstehen wir eine endlich erzeugte $k$-Algebra.

Wir formulieren das Hauptergebnis dieses Kapitels.

Theorem 1 ([**24**]). *Sei $k$ algebraisch abgeschlossen und $H$ eine endlich erzeugte abelsche Gruppe vom Rang 1. Sei $R$ eine kommutative $H$-graduierte $k$-Algebra, die* **(F1)**–**(F3)** *erfüllt. Dann gibt es eine Gewichtssequenz $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_t)$ und eine Parameterfolge $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_3, \ldots, \lambda_t)$ von paarweise verschiedenen Körperelementen $\lambda_i \neq 0$, so daß $H$ und $\mathbb{L}(\mathbf{p})$ als Gruppen, und $R$ und $\mathbb{S}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda})$ als graduierte Algebren isomorph sind.*

Der Beweis wird in den kommenden Abschnitten in folgender Weise geführt: Zunächst definieren wir die Klasse von graduiert faktoriellen Algebren, die wir untersuchen. Einer solchen Algebra $R$ ordnen wir eine nicht-singuläre Kurve zu und untersuchen deren Eigenschaften. Wir stellen fest, daß die Kategorie der kohärenten Garben endlicher Länge über dieser Kurve eine tubulare Familie ist. Dann untersuchen wir die sogenannte *homogene* Situation, in der alle Röhren homogen, d. h. vom Rang 1, sind. Wir zeigen, daß $R$ dann als graduierte Algebra isomorph sein muß zur Polynomalgebra $k[X, Y]$. Zum Schluß zeigen wir dann, wie sich der allgemeine Fall auf die homogene Situation reduzieren läßt.

Es sei darauf hingewiesen, daß wir in dieser Arbeit den Begriff "homogen" in zwei verschiedenen Bedeutungen benutzen: Manchmal ist er auf die graduierte Algebra bezogen (homogene Elemente), an anderen Stellen wird damit eine Röhre bezeichnet, die genau ein einfaches Objekt enthält. Aus dem Kontext geht aber immer hervor, welche Bedeutung gerade zutrifft.

## 1.2. Die zugeordnete Kurve

Im folgenden sei $H$ stets eine endlich erzeugte abelsche Gruppe vom Rang 1 und $R$ eine $H$-graduierte $k$-Algebra, die kommutativ ist. Um die Bedeutung der Faktorialität herausheben zu können, nehmen wir an, daß $R$ obige Bedingungen **(F2)** und **(F3)**, aber statt **(F1)** nur

**(N):** $R$ ist graduiert normaler Integritätsring.

erfüllt. *Graduiert normal* bedeutet, daß jedes *homogene* Element $x$ im *graduierten* Quotientenkörper von $R$, welches $f(x) = 0$ erfüllt, wobei $f \in R[T]$ normiert ist (und o. E. nur homogene Koeffizienten hat), schon selbst in $R$ liegt. Die Algebra $k[X,Y,Z]/(Z^2 - XY)$ ist ein Beispiel dafür, welches nicht graduiert faktoriell ist. Wir werden später noch näher auf dieses Beispiel eingehen. Es sei hier angemerkt, daß alle Aussagen in diesem Abschnitt über beliebigem Körper richtig sind.

Ist $R = k[z_1, \ldots, z_n]$ ($z_1, \ldots, z_n$ homogen, o. E. vom Grad $\neq 0$), so erzeugen die Grade $\vec{z}_1, \ldots, \vec{z}_n$ die abelsche Gruppe $H$. Ist $R$ sogar graduiert faktoriell, so kann man $z_1, \ldots, z_n$ homogen prim wählen.

Lemma 1.2.1. *$\vec{z}_1, \ldots, \vec{z}_n$ spannen den positiven Kegel $H_+$ einer (partiellen) Ordnung $\leq$ auf der Gruppe $H$ auf (verträglich mit der Gruppenstruktur), und es gilt $g \leq h$, genau wenn $R_{h-g} \neq 0$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst die zweite Aussage: Es gelte $g \leq h$, also gibt es $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geq 0$ mit $h - g = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{z}_i$, und es gilt $0 \neq z_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot z_n^{\alpha_n} \in R_{h-g}$. Ist umgekehrt $0 \neq r \in R_{h-g}$, so ist $r$ Summe von Monomen in $z_1, \ldots, z_n$ desselben Grades, und es folgt $h - g \geq 0$.

Für die erste Aussage zeigen wir nur Antisymmetrie: Sei $h \in H$ mit $h \geq 0$ und $-h \geq 0$. Dann gibt es $r \in R_h$, $s \in R_{-h}$ mit $r$, $s \neq 0$. Es ist $rs \in R_0$ eine Einheit, also auch $r$ selbst, und weil alle homogenen Einheiten den Grad 0 haben, folgt $h = 0$. $\square$

Lemma 1.2.2. *Alle Komponenten $R_h$ ($h \in H$) sind endlichdimensional.*

Beweis. Sei $H_T$ die Torsionsuntergruppe von $H$ und $\pi : H \longrightarrow H/H_T \simeq \mathbb{Z}$ die kanonische Surjektion. Via $\pi$ ist $R$ eine $\mathbb{Z}$-graduierte $k$-Algebra, und die Erzeuger $z_1, \ldots, z_n$ sind homogen, und die nullte Komponente stimmt mit $R_0$ überein (denn ist $0 \neq r \in R_h$ mit $h \in H_T$, etwa $t \cdot h = 0$, so ist $r^t$ eine Einheit, also auch $r$, und es folgt $h = 0$). Außerdem gilt offenbar $\pi(H_+) \subset \mathbb{Z}_+$ (o. E., andernfalls $\subset \mathbb{Z}_-$). Also ist $R$ eine positiv $\mathbb{Z}$-graduierte endlich erzeugte $k$-Algebra. Sei $m > 0$. Dann wird $R_m$ erzeugt durch Monome $z_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot z_n^{\alpha_n}$, mit $\alpha_i \geq 0$ und $\sum_{i=1}^n \alpha_i \pi(\vec{z}_i) = m$, und hiervon gibt es nur endlich viele. Also ist $R_m$ endlichdimensional, und somit sind es auch alle $R_h$ mit $\pi(h) = m$. $\square$

Sei $\mathbb{X} = \mathrm{Proj}^H(R)$ das $H$-graduierte Spektrum von $R$, also die Menge aller homogenen Primideale in $R$, die verschieden sind vom einzigen maximalen homogenen Ideal, welches durch $z_1, \ldots, z_n$ erzeugt wird (vgl. [**19**, §7]). Wegen **(N)** und **(F2)** gilt

Lemma 1.2.3. *$\mathbb{X}$ ist eine nicht-singuläre Kurve (im graduierten Sinne, d. h. für alle homogenen Primideale $\mathfrak{p} \subset R$ der Höhe 1 ist $R_\mathfrak{p}$ graduiert regulär lokal).* $\square$

Sei $\mathrm{coh}^H(\mathbb{X})$ (bzw. $\mathrm{vect}^H(\mathbb{X})$) die Kategorie der $H$-graduierten kohärenten Garben (bzw. Vektorbündel) über $\mathbb{X}$ (vgl. [**18**] und [**19**, §7]). Mit $\mathcal{O} = \mathcal{O}_\mathbb{X}$ bezeichnen wir die Strukturgarbe von $\mathbb{X}$. Bezeichnet man für ein homogenes Element $f \in R \setminus \{0\}$ mit $\mathbb{X}_f$ die offene Menge aller $x \in \mathbb{X}$, so daß $f \notin x$ gilt, so ist also $\mathcal{O}(\mathbb{X}_f) = R[f^{-1}]$ eine $H$-graduierte $k$-Algebra, und für jede kohärente Garbe $\mathcal{F}$ ist $\mathcal{F}(\mathbb{X}_f)$ ein $H$-graduierter

$\mathcal{O}(\mathbb{X}_f)$-Modul. Dementsprechend bezeichne $\mathrm{Hom}_{\mathbb{X}}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ für $\mathcal{F}$, $\mathcal{G} \in \mathrm{coh}^H(\mathbb{X})$ den $k$-Vektorraum aller homogenen Morphismen vom Grad 0. Aus **(N)** folgt

LEMMA 1.2.4. *Für alle $h_1$, $h_2 \in H$ gilt* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{X}}(\mathcal{O}(h_1),\mathcal{O}(h_2)) \simeq R_{h_2-h_1}$. □

Sei $\mathcal{F} \in \mathrm{coh}^H(\mathbb{X})$. Der *Rang* von $\mathcal{F}$ wird definiert als $\mathrm{rk}(\mathcal{F}) = \dim_{K_0}(\mathcal{F}_\xi)_0$, wobei $\xi$ den generischen Punkt in $\mathbb{X}$ bezeichnet, der dem Nullideal zugeordnet ist, und $K_0$ die nullte Komponente des graduierten Quotientenkörpers ist. Ein Vektorbündel vom Rang 1 heißt *Linienbündel*.

Bezeichne mit $\mathrm{Pic}^H(\mathbb{X})$ die Picard-Gruppe von $\mathbb{X}$, d. h. die Menge aller Isomorphieklassen von Linienbündeln. Die Gruppenstruktur wird durch das Tensorprodukt geliefert. Als neutrales Element fungiert die Strukturgarbe $\mathcal{O}$. Verschiebung $h \mapsto \mathcal{O}(h)$ induziert einen Gruppenhomomorphismus $H \longrightarrow \mathrm{Pic}^H(\mathbb{X})$, der immer injektiv ist, da nach Voraussetzung jede homogene Einheit in $R$ vom Grad null ist.

PROPOSITION 1.2.5. *Die Algebra $R$ ist genau dann graduiert faktoriell, wenn der durch $h \mapsto \mathcal{O}(h)$ induzierte Homomorphismus $H \longrightarrow \mathrm{Pic}^H(\mathbb{X})$ bijektiv ist.*

Der Beweis wird im Anhang erbracht. Dort wird der Cokern vom Homomorphismus $H \longrightarrow \mathrm{Pic}^H(\mathbb{X})$ untersucht.

Faktorialität bedeutet also vollständige Kontrolle über die Linienbündel. Dies ist insbesondere auch wegen der folgenden Aussage wichtig. Wir sagen, daß ein Vektorbündel $\mathcal{F} \in \mathrm{vect}^H(\mathbb{X})$ eine *Linienbündelfiltrierung* hat, falls

$$0 = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_t = \mathcal{F}$$

existiert, wobei $\mathcal{F}_i$ Vektorbündel sind, so daß die $\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1}$ Linienbündel sind.

LEMMA 1.2.6. *Jedes Vektorbündel über $\mathbb{X}$ hat eine Linienbündelfiltrierung.*

BEWEIS. Verläuft völlig analog zu [**18**, Prop. 2.6]. □

Wir kommen nun zu cohomologischen Eigenschaften der Kurve $\mathbb{X}$. Es gilt $\mathrm{Ext}^i_{\mathbb{X}}(-,-) = 0$ für $i > 1$, und $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{X}}(-,-)$ läßt sich auf $\mathrm{Hom}_{\mathbb{X}}(-,-)$ zurückführen:

PROPOSITION 1.2.7 (Serre-Dualität). *Es gibt ein (eindeutiges) Linienbündel $\boldsymbol{\omega}_{\mathbb{X}} \in \mathrm{Pic}^H \mathbb{X}$, so daß für alle $\mathcal{F}$, $\mathcal{G} \in \mathrm{coh}^H(\mathbb{X})$ der funktorielle Isomorphismus*

$$\mathrm{D}\,\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{X}}(\mathcal{F},\mathcal{G}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{X}}(\mathcal{G},\mathcal{F}\otimes\boldsymbol{\omega}_{\mathbb{X}})$$

*gilt.*

Hierbei ist D die Dualität $\mathrm{Hom}_k(-,k)$

BEWEIS. Dies ist in [**15**, Cor. 2.5.12] bewiesen. □

Im Fall der graduierten Faktorialität wird obige Formel besonders handlich. In dem Fall gibt es ein eindeutiges $\omega \in H$, *dualisierendes Element* genannt, so daß $\boldsymbol{\omega}_{\mathbb{X}} = \mathcal{O}(\omega)$ gilt. Es gibt also einen in $\mathcal{F}$, $\mathcal{G} \in \mathrm{coh}^H(\mathbb{X})$ funktoriellen Isomorphismus

$$\mathrm{D}\,\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{X}}(\mathcal{F},\mathcal{G}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{X}}(\mathcal{G},\mathcal{F}(\omega)).$$

Wir geben ein weiteres, nicht notwendig graduiert faktorielles Beispiel an, in dem man $\boldsymbol{\omega}_{\mathbb{X}}$ berechnen kann. In späteren Abschnitten spielen die $\mathbb{Z}$-graduierten Algebren der Form $k[X,Y,Z]/Q(X,Y,Z)$ eine wichtige Rolle, graduiert durch Totalgrad, wobei $Q(X,Y,Z)$ eine nicht-ausgeartete ternäre quadratische Form über $k$ ist. In diesem Fall ist $-1$ das dualisierende Element (folgt z. B. aus [**15**, Cor. 2.5.11]).

Korollar 1.2.8. *Die Kategorie* $\mathrm{coh}^H(\mathbb{X})$ *enthält weder Projektive noch Injektive* $\neq 0$ *und besitzt Auslander-Reiten-Folgen. Hat* $\mathbb{X}$ *ein dualisierendes Element* $\omega \in H$*, so gibt es zu jedem* $\mathcal{F} \in \mathrm{coh}^H(\mathbb{X})$ *eine Auslander-Reiten-Folge der Form*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F}(-\omega) \longrightarrow 0.$$

Als weitere Folgerung der Serre-Dualität ergibt sich zusammen mit Lemma 1.2.2

Korollar 1.2.9. *Die Kategorie* $\mathrm{coh}^H(\mathbb{X})$ *ist lokal-endlich, d. h. für alle* $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathrm{coh}^H(\mathbb{X})$ *sind* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{X}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ *und* $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{X}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ *endlichdimensionale* $k$*-Vektorräume.* □

Es sei hier noch auf einen Zusammenhang zu graduierten Cohen-Macaulay Moduln hingewiesen:

Proposition 1.2.10 ([**19**, Prop. 8.3]). *Die Zuordnung*

$$\mathcal{F} \mapsto \bigoplus_{h \in H} \mathrm{Hom}_{\mathbb{X}}(\mathcal{O}, \mathcal{F}(h))$$

*induziert eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\mathrm{vect}^H(\mathbb{X}) \longrightarrow \mathrm{CM}^H(R),$$

*wobei* $\mathrm{CM}^H(R)$ *die Kategorie der* $H$*-graduierten maximalen Cohen-Macaulay Moduln über* $R$ *bezeichnet.* □

## 1.3. Linienbündel und einfache Garben

Eine weitere Charakterisierung der graduierten Faktorialität ist, daß jeder (abgeschlossene) Punkt in $\mathbb{X}$ ein Hauptideal ist, erzeugt durch ein homogenes Primelement in $R$ (vgl. Anhang B). Daher korrespondieren (abgeschlossene) Punkte in $\mathbb{X}$ mit homogenen Primelementen in $R$ (bis auf Assoziiertheit). Ein analoges Wechselspiel hat man zwischen (abgeschlossenen) Punkten in $\mathbb{X}$ und einfachen Garben in $\mathrm{coh}^H(\mathbb{X})$ (das sind Garben $\neq 0$, die keine nicht-trivialen Untergarben besitzen), wie in den folgenden Abschnitten gezeigt wird. Hierfür ist die folgende Definition nützlich.

Definition 1.3.1. Sei $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{X}}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$, wobei $\mathcal{L}_1$ und $\mathcal{L}_2$ Linienbündel sind. $f$ heißt 1-*irreduzibel*, falls $f$ kein Isomorphismus ist, und aus einem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L}_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & \mathcal{L}_2, \\ & \mathcal{L} \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

wobei $\mathcal{L}$ ein Linienbündel ist, folgt, daß $g$ oder $h$ ein Isomorphismus ist.

Lemma 1.3.2. *Seien* $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ *Linienbündel und* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{X}}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) \setminus \{0\}$*. Betrachte die exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_1 \xrightarrow{f} \mathcal{L}_2 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0.$$

*Dann ist* $\mathcal{F}$ *einfach, genau wenn* $f$ 1*-irreduzibel ist. Jede einfache Garbe ist von dieser Form, d. h. Cokern einer* 1*-irreduziblen Abbildung (wobei* $\mathcal{L}_2 \simeq \mathcal{O}(h)$ *für ein* $h \in H$ *angenommen werden kann).*

Beweis. (1) Sei $\mathcal{F}$ einfach und $f = hg$. Dann erhält man das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{L}_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & \mathcal{L}_2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{L} \arrow[r, "h"] & \mathcal{L}_2 \arrow[r] & \mathcal{F}' \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

und dann ist entweder $\mathcal{F}' = 0$ und somit $h$ ein Isomorphismus, oder $\mathcal{F}' \simeq \mathcal{F}$ und somit $g$ ein Isomorphismus. Also ist $f$ 1-irreduzibel.

(2) Sei umgekehrt $f$ 1-irreduzibel und $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'$ ein Epimorphismus. Dann erhält man ein kommutatives exaktes Diagramm wie in (1), und dann ist $g$ oder $h$ Isomorphismus, also $\mathcal{F}' = 0$ oder $\mathcal{F}' \simeq \mathcal{F}$, und somit ist $\mathcal{F}$ einfach.

(3) Die letztgenannte Aussage folgt, da jede kohärente Garbe eine Auflösung durch direkte Summen von Verschiebungen der Strukturgarbe besitzt. □

Es gilt

$$\pi \text{ prim} \implies \cdot\pi \text{ 1-irreduzibel} \implies \pi \text{ irreduzibel}.$$

Ist $R$ graduiert faktoriell, so fallen die Begriffe zusammen.

## 1.4. Primelemente und einfache Garben

*Für den Rest des Kapitels sei $R$ graduiert faktoriell, d. h. erfülle die Bedingungen* **(F1)**–**(F3)**.

Wir setzen immer voraus, daß $R = k[\pi_1, \ldots, \pi_n]$ ist, wobei die $\pi_i$ als homogen prim und paarweise nicht-assoziiert angenommen werden können; seien $x_i \in \mathbb{X}$ die entsprechenden Punkte und $\vec{x}_i$ deren Grade. Die Gruppe $H$ wird dann von $\langle \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n \rangle$ erzeugt.

Schreiben wir $x \in \mathbb{X}$, so meinen wir stets, daß $x$ ein abgeschlossener Punkt ist, d. h. einem homogenen Primideal der Höhe 1 entspricht. Zu $x \in \mathbb{X}$ gibt es ein bis auf Assoziiertheit eindeutiges homogenes Primelement $\pi_x$ mit $x = \pi_x R$. Es gilt also $\pi_i = \pi_{x_i}$ für $i = 1, \ldots, n$. Für jedes homogene $r \in R$, $r \neq 0$, bezeichnen wir mit $\vec{r}$ den Grad von $r$. Ist $x \in \mathbb{X}$, so schreiben wir $\vec{x} = \vec{\pi}_x$.

Graduierte Faktorialität ermöglicht eine Beschreibung der einfachen Garben in $\mathrm{coh}^H(\mathbb{X})$, wie die folgende Aussage darlegt.

Proposition 1.4.1. *Sei $\pi \in R \setminus \{0\}$ homogen. Betrachte die exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{\cdot\pi} \mathcal{O}(\vec{\pi}) \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0.$$

(1) *$\mathcal{F}$ ist einfach, genau wenn $\pi$ prim ist; in diesem Fall ist $\mathcal{F}$ einfach konzentriert in $R\pi \in \mathbb{X}$.*

(2) *Jede einfache Garbe ist bis auf Verschiebung von obiger Form.*

(3) *Seien $x$, $y \in \mathbb{X}$, $x \neq y$, und sei $\mathcal{S}$ einfach und konzentriert im Punkt $x$. Dann induziert Multiplikation mit $\pi_y$ einen Isomorphismus $\mathcal{S} \simeq \mathcal{S}(\vec{y})$.*

Beweis. (2) und der erste Teil von (1) folgen aus Lemma 1.3.2. Sei $x$ der Punkt $R\pi$, sei $y \in \mathbb{X}$. Da $R_x$ graduiert lokal ist (mit maximalem homogenen Ideal $\pi R_x$), induziert Multiplikation mit $\pi_y$ einen Isomorphismus $R_x \longrightarrow R_x(\vec{y})$ genau, wenn $y \neq x$, also ist $\mathcal{S}_x = 0$ genau für $y \neq x$. □

KOROLLAR 1.4.2. *Sei $r \in R$ homogen und zerfalle in ein Produkt von (nicht notwendig verschiedenen) homogenen Primelementen $q_1, \dots, q_s$. Seien*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{\cdot q_i} \mathcal{O}(\vec{q_i}) \longrightarrow \mathcal{S}_i \longrightarrow 0$$

*exakt ($i = 1, \dots, s$). Betrachte*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{\cdot r} \mathcal{O}(\vec{r}) \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0.$$

*Dann gilt: $\ell(\mathcal{F}) = s$, und die Kompositionsfaktoren von $\mathcal{F}$ sind*

$$\mathcal{S}_1,\ \mathcal{S}_2(\vec{q_1}),\ \mathcal{S}_3(\vec{q_1} + \vec{q_2}), \dots, \mathcal{S}_s\left(\sum_{i=1}^{s-1} \vec{q_i}\right).$$

BEWEIS. Der Fall "$r = 1$" folgt aus Proposition 1.4.1. Sei $r > 1$. Man hat das exakte kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{O} \arrow[r, "\cdot r"] \arrow[d, "\cdot q_1"'] & \mathcal{O}(\vec{r}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}(\vec{q_1}) \arrow[r, "\cdot r'"] \arrow[d] & \mathcal{O}(\vec{r}) \arrow[r] & \mathcal{F}' \arrow[r] & 0 \\
 & \mathcal{S}_1 & & &
\end{tikzcd}$$

mit $r' = q_2 \cdots q_s$. Mit dem Kern-Cokern-Lemma erhält man eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}_1 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow 0.$$

Nach Induktionsvoraussetzung hat $\mathcal{F}'(-\vec{q_1})$ die Kompositionsfaktoren $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3(\vec{q_2}), \dots, \mathcal{S}_s\big(\sum_{i=2}^{s-1} \vec{q_i}\big)$, und es folgt die Behauptung. □

## 1.5. Die zugehörige tubulare Familie

PROPOSITION 1.5.1. *Sei $x \in \mathbb{X}$. Dann ist die Anzahl der Isomorphieklassen einfacher Garben, die in $x$ konzentriert sind, endlich; ist $x \notin \{x_1, \dots, x_n\}$, so ist diese Anzahl genau 1.*

Wir bezeichnen diese Anzahl mit $p(x)$ und nennen $p : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{N}$ die *Gewichtsfunktion* von $\mathbb{X}$.

BEWEIS. Seien $x$, $y \in \mathbb{X}$, $x \neq y$ (gibt es immer, da die Krulldimension $= 2$ ist), und sei $\mathcal{S}$ einfach und konzentriert im Punkt $x$. Es ist $\vec{y} > 0$, und da $H$ Rang 1 hat, ist $H/\mathbb{Z}\vec{y}$ endlich. Sei $H_x = \{h \in H \mid \mathcal{S} \simeq \mathcal{S}(h)\}$ die Standuntergruppe von $x$ (die unabhängig ist von der Wahl von $\mathcal{S}$). Dann ist offenbar

$$p(x) = [H : H_x].$$

Aus Proposition 1.4.1 (3) folgt, daß $[H : H_x]$ endlich ist. Ist $x \notin \{x_1, \dots, x_n\}$, so folgt $H = H_x$ und somit $p(x) = 1$, da $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ die Gruppe $H$ erzeugen. □

PROPOSITION 1.5.2. *Sei $x \in \mathbb{X}$ und $\mathcal{S}$ einfach konzentriert in $x$. Dann gilt*

$$\mathcal{S}(\omega) \simeq \mathcal{S}(-\vec{x}).$$

Beweis. Nach evtl. Verschieben von $\mathcal{S}$ erhält man die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}(\vec{x}) \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow 0.$$

Dann ist $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}(\vec{x}), \mathcal{S}) \neq 0$ und $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{S}, \mathcal{O}) \neq 0$, und aus der Serre-Dualität folgt $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}, \mathcal{S}(\omega)) \neq 0$. Also erhält man Epimorphismen $\mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{S}(-\vec{x})$ und $\mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{S}(\omega)$, und da $\mathcal{S}(-\vec{x})$ und $\mathcal{S}(\omega)$ beide in $x$ konzentriert sind, folgt die Behauptung nun mit Proposition 1.4.1. □

Korollar 1.5.3. *Sei $x \in \mathbb{X}$ und $\mathcal{S}$ einfach konzentriert in $x$. Dann*

$$p(x) > 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{X}}(\mathcal{S}, \mathcal{S}) = 0.$$

Eine Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{coh}^H(\mathbb{X})$ heißt *exzeptionell*, wenn $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{F}) = 0$ und $\mathrm{End}(\mathcal{F})$ ein Schiefkörper ist. Sei $x \in \mathbb{X}$ und $\mathcal{S}$ einfach konzentriert in $x$. $\mathcal{S}$ ist also genau dann exzeptionell, wenn $p(x) > 1$ gilt. In diesem Fall heißt auch $x$ *exzeptionell* oder *Ausnahmepunkt*. Andernfalls heißt $x$ bzw. $\mathcal{S}$ *homogen* oder *gewöhnlich*.

Sei $\langle -, - \rangle : \mathrm{K}_0(\mathbb{X}) \times \mathrm{K}_0(\mathbb{X}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ die durch

$$\langle [\mathcal{F}], [\mathcal{G}] \rangle = \dim_k \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) - \dim_k \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{G})$$

definierte Eulerform auf der Grothendieck-Gruppe von $\mathrm{coh}^H(\mathbb{X})$. Eine einfache Garbe $\mathcal{S}$ ist also genau dann homogen, wenn $\langle [\mathcal{S}], [\mathcal{S}] \rangle = 0$ gilt.

Bezeichne mit $\mathrm{coh}^H_0(\mathbb{X})$ die volle Unterkategorie von $\mathrm{coh}^H(\mathbb{X})$ der Garben endlicher Länge.

Korollar 1.5.4. *Sei $x \in \mathbb{X}$. Die einfachen Garben, die in $x$ konzentriert sind, bilden einen Auslander-Reiten-Orbit. Die Kategorie $\mathcal{C}_x$ aller Garben endlicher Länge mit Träger $\{x\}$ ist eine zusammenhängende, einreihige Kategorie. Es gilt*

$$\mathrm{coh}^H_0(\mathbb{X}) = \coprod_{x \in \mathbb{X}} \mathcal{C}_x.$$

Beweis. Die erste Aussage folgt aus 1.5.2. Der Rest ergibt sich wie in [**32**, S 8] aus [**17**, 8.3 ] (vgl. auch [**40**, 5. Lemma 3]). □

## 1.6. Der homogene Fall

Wir betrachten nun die spezielle Situation, in der alle Gewichte $p(x) = 1$ sind (für alle $x \in \mathbb{X}$). Dies bedeutet, daß alle Röhren in $\mathrm{coh}^H_0(\mathbb{X})$ vom Rang 1, d. h. homogen, sind. Wir nennen $\mathbb{X}$ bzw. $R$ *homogen*. Wir werden zeigen, daß dann schon $H \simeq \mathbb{Z}$ gilt und $R$ als graduierte Algebra isomorph ist zu der durch Totalgrad graduierten Polynomalgebra $k[X, Y]$.

Wir definieren den *Grad* einer Garbe $\mathcal{F} \in \mathrm{coh}^H(\mathbb{X})$ durch

$$\deg(\mathcal{F}) := \langle [\mathcal{O}], [\mathcal{F}] \rangle - \mathrm{rk}(\mathcal{F}) \cdot \langle [\mathcal{O}], [\mathcal{O}] \rangle.$$

Rang und Grad liefern Linearformen

$$\mathrm{rk} : \mathrm{K}_0(\mathbb{X}) \longrightarrow \mathbb{Z}, \ \deg : \mathrm{K}_0(\mathbb{X}) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

auf der Grothendieck-Gruppe.

Lemma 1.6.1. *Für jede einfache Garbe $\mathcal{S}$ gilt* $\deg \mathcal{S} = 1$.

Beweis. Sei $\mathcal{S}$ konzentriert in $R\pi$, sei $f \in R$ homogen prim mit $f \notin R\pi$. Sei $U := \mathbb{X}_f$, eine offene Menge in $\mathbb{X}$. Dann gilt (als $k$-Vektorräume)

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{X}}(\mathcal{O},\mathcal{S}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{|U}}(\mathcal{O}_{|U},\mathcal{S}_{|U}) \simeq \mathrm{Hom}_{R[f^{-1}]}(R[f^{-1}],S) \simeq S_0,$$

wobei $S$ ein graduierter Restklassenring von $R[f^{-1}]$ modulo einem homogenen maximalen Ideal ist. Ebenso gilt

$$\mathrm{End}_{\mathbb{X}}(\mathcal{S}) \simeq \mathrm{End}_{R[f^{-1}]}(S) \simeq \mathrm{End}_S(S) \simeq S_0.$$

Da $\mathrm{End}_{\mathbb{X}}(\mathcal{S})$ ein endlichdimensionaler Schiefkörper und $k$ algebraisch abgeschlossen ist, folgt wegen $\deg \mathcal{S} = \dim_k \mathrm{Hom}_{\mathbb{X}}(\mathcal{O},\mathcal{S})$ die Behauptung. □

Wir bezeichnen die einfache Garbe, die im Punkt $x_i$ konzentriert ist, mit $\mathcal{S}_i$. Wir definieren eine Abbildung $\delta : H \longrightarrow \mathbb{Z}$ durch $\delta(h) = \deg(\mathcal{O}(h))$ für jedes $h \in H$.

Lemma 1.6.2. *Die Abbildung $\delta : H \longrightarrow \mathbb{Z}$ ist ein Homomorphismus von Gruppen, und es gilt*

$$\delta\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

*für alle $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Z}$.*

Beweis. Es genügt, die zweite Aussage zu beweisen. Diese ergibt sich aus Betrachtung der exakten Folgen

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{\cdot \pi_i} \mathcal{O}(\vec{x}_i) \longrightarrow \mathcal{S}_i \longrightarrow 0$$

für $i = 1, \dots, n$ per Induktion zusammen mit Lemma 1.6.1. □

Ist $\pi \in R$ homogen prim, so zeigt die exakte Folge

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{\cdot \pi} \mathcal{O}(\vec{\pi}) \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow 0,$$

wobei $\mathcal{S}$ eine einfache Garbe ist, daß $\delta(\vec{\pi}) = 1$ gilt, und es folgt $\vec{\pi} = \vec{x}_i$ für ein $i \in \{1, \dots, n\}$.

Lemma 1.6.3. *Es gibt $i$, $j \in \{1, \dots, n\}$ mit $i \neq j$ und $\vec{x}_i = \vec{x}_j$.*

Beweis. Da $\vec{x}_1 - \vec{x}_2 \in \mathrm{Kern}\,\delta$, gibt es $m_1$, $m_2 > 0$ mit $m_1\vec{x}_1 = m_2\vec{x}_2$ (es gilt sogar $m_1 = m_2$). Da $k$ (wegen $k = \overline{k}$) unendlich ist, sind

$$\pi_1^{m_1} + \lambda \pi_2^{m_2} \qquad (\lambda \in k)$$

unendlich viele paarweise nicht-assoziierte homogene Elemente desselben Grades. Wegen der Faktorialität gibt es daher unendlich viele paarweise nicht-assoziierte homogene Primelemente.

Sei $\pi$ ein homogenes Primelement, welches zu keinem $\pi_i$ assoziiert ist. $\pi$ ist von der Form

$$\pi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \pi_i \quad (\alpha_i \in k),$$

also gibt es $i$, $j \in \{1, \dots, n\}$ mit $i \neq j$ und $\alpha_i$, $\alpha_j \neq 0$, und dann ist $\vec{x}_i = \vec{x}_j$. □

Wir nehmen nun ohne Einschränkung an, daß $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$ gilt. Wir betrachten die graduierte Teilalgebra $S = k[\pi_1, \pi_2]$, welche isomorph zur Polynomalgebra $k[X,Y]$ ist, durch Totalgrad $\mathbb{Z}$-graduiert.

LEMMA 1.6.4. *$R$ ist endlich erzeugter $S$-Modul.*

BEWEIS. $R/(\pi_1, \pi_2)$ ist von graduierter Krulldimension null, ist also graduiert artinsch, und daher ist das maximale homogene Ideal nilpotent. Also gibt es eine ganze Zahl $r > 0$ mit $(\pi_1, \dots, \pi_n)^r \subset (\pi_1, \pi_2)$. Es folgt, daß $R$ als $S$-Modul erzeugt wird von "Monomen" $\pi_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot \pi_n^{\alpha_n}$, wobei $\alpha_1 + \dots + \alpha_n < r$. $\square$

SATZ 1.6.5. *Es gelte $p(x_i) = 1$ für $i = 1, \dots, n$. Dann ist $R$ als graduierte Algebra isomorph zur Polynomalgebra $k[X, Y]$, welche durch Totalgrad graduiert ist.*

BEWEIS. Da $R$ ein endlich erzeugter $S$-Modul ist, gilt für jedes homogene Primideal $\mathfrak{p} \subset R$ der Höhe 1, daß das homogene Primideal $\mathfrak{p} \cap S$ ebenfalls die Höhe 1 hat. Insbesondere gilt $R\pi_i \cap S = S\pi_i'$ für ein homogenes Primelement $\pi_i' \in S$ $(i = 3, \dots, n)$. Da $k$ algebraisch abgeschlossen ist, folgt $\pi_i' \sim \alpha_i\pi_1 + \beta_i\pi_2$ mit $\alpha_i$, $\beta_i \in k$, und daher $\pi_i \sim \alpha_i\pi_1 + \beta_i\pi_2$ $(i = 3, \dots, n)$. Es ergibt sich $R = k[\pi_1, \pi_2]$. $\square$

Eine Beweisvariante wird in Abschnitt 3.4 vorgestellt.

## 1.7. Reduktion von Gewichten

Die $H$-graduierte $k$-Algebra $R$ erfülle weiterhin **(F1)**–**(F3)**. Wir behandeln nun den allgemeinen Gewichtsfall durch Zurückführung auf den homogenen Fall.

Wir erinnern an die Definition der Standuntergruppe $H_x$ $(x \in \mathbb{X})$: Es ist $H_x = \{h \in H \mid \mathcal{S}(h) \simeq \mathcal{S}\}$, wobei $\mathcal{S}$ eine einfache Garbe ist, die in $x$ konzentriert ist.

Ist $R = \bigoplus_{h \in H} R_h$ eine $H$-graduierte Algebra und $U \subset H$ eine Untergruppe, so bezeichnen wir die Einschränkung $\bigoplus_{u \in U} R_u$ mit $R_{|U}$; diese kann man als $U$-graduierte und als $H$-graduierte Algebra auffassen.

PROPOSITION 1.7.1 (Reduktionslemma). *Nehme $p_1 > 1$ an. Sei $H'$ die durch $\vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ erzeugte Untergruppe von $H$, sei $R'$ die in $R\pi_1$ reduzierte Algebra, $R' = k[\pi_1^{p_1}, \pi_2, \dots, \pi_n]$. Dann gilt:*
(1) $p_1 = \min\{l > 0 \mid l\vec{x}_1 \in H'\} = [H : H']$.
(2) $H' = H_{x_1}$.
(3) $R' = R_{|H'}$.
(4) $R_{\vec{x}_1} = k\pi_1$.
(5) *Die $H'$-graduierte Algebra $R'$ erfüllt* **(F1)**–**(F3)**.
*Sei $\mathbb{X}' := \mathrm{Proj}^{H'}(R')$, sei $x_1' = R'\pi_1^{p_1}$. Dann gilt*
(6) $\mathbb{X}' = \mathbb{X} \setminus \{x_1\} \cup \{x_1'\}$.
*Sei $p' : \mathbb{X}' \longrightarrow \mathbb{N}$ die Gewichtsfunktion von $\mathbb{X}'$, und seien $x_i' \in \mathbb{X}'$ die zu $\pi_i$ assoziierten Punkte $(i = 2, \dots, n)$. Dann gilt*
(7) $p'(x_1') = 1$ *und* $p'(x_i') = p_i$ *für* $i = 2, \dots, n$.

BEWEIS. (1), (2) Sei $\mathcal{S}$ eine einfache Garbe, die in $x_1$ konzentriert ist. Aus dem Beweis von Proposition 1.5.1 folgt $p_1 = [H : H_{x_1}]$. Daher gilt $H_{x_1} \cap \mathbb{Z}\vec{x}_1 = \mathbb{Z}p_1\vec{x}_1$. Aus Proposition 1.4.1 (3) folgt $H' \subset H_{x_1}$. Andererseits gilt $p_1\vec{x}_1 \in H'$: Denn aus $\mathcal{S}(p_1\vec{x}_1) \simeq \mathcal{S}$ folgt auch für die Lokalisierung $R_{x_1}$ die Isomorphie $R_{x_1}(p_1\vec{x}_1) \simeq R_{x_1}$, d. h. in der Komponente vom Grad $p_1\vec{x}_1$ der graduierten Algebra $R_{x_1}$ gibt es eine Einheit. Diese ist ein Bruch, in der Zähler und Nenner ein Produkt von Primelementen ist, die nicht assoziiert sind zu $\pi_1$. Es folgt $p_1\vec{x}_1 \in H'$. Damit ergibt sich $H' = H_{x_1}$.

(3) Wegen $p_1\vec{x}_1 \in H'$ gilt $R' \subset R_{|H'}$. Sei umgekehrt $r$ in $R$ homogen mit $\vec{r} \in H'$. Es ist $r = \pi_1^s b_1 \dots b_t$, wobei $s$, $t \geq 0$ und $b_i$ homogen prim und nicht assoziiert zu $\pi_1$ sind. Mit (1) folgt $s \cdot \vec{x}_1 \in H'$, also $s \in \mathbb{Z}p_1$ und somit $r \in R'$.

(4) Sei $r \in R_{\vec{x}_1}$, $r \neq 0$. Es gibt eine Zerlegung $r = \pi_1^s b_1 \dots b_t$ wie im Beweis von (3). Wegen $\vec{x}_1 \notin H'$ kann $s = 0$ nicht gelten. Aus $(1-s)\vec{x}_1 = \sum_{i=1}^t \vec{b}_i \geq 0$ folgt $s = 1$ und $t = 0$.

(5) Für die graduierte Krulldimension gilt $\dim^{H'} R' = 2$, denn offenbar ist $\dim^{H'} R' = \dim^H R'$, und da $R$ endlich erzeugt als $H$-graduierter $R'$-Modul ist, folgt $\dim^H R' = \dim^H R$. Zur graduierten Faktorialität ist nur zu zeigen, daß jedes homogene Element $\pi \in R'$, welches prim in $R$ ist, auch prim in $R'$ ist. Dies folgt aber mit denselben Argumenten wie im Beweis von (3).

(6) Nach Beweisteil (5) gilt $\mathbb{X} \setminus \{x_1\} \subset \mathbb{X}'$. Außerdem ist $\pi_1^{p_1}$ prim in $R'$. Ist umgekehrt $\pi \in R'$ homogen prim, so gilt wieder (in $R$) $\pi = \pi_1^s b_1 \dots b_t$ mit $s \in \mathbb{N}_0 p_1$ und homogenen Primelementen $b_i \in R$, die nicht assoziiert zu $\pi_1$ sind, also schon in $R'$ liegen, und es folgt $\pi = \pi_1^{p_1}$ oder $\pi = b_i$ für ein $i$. Insgesamt folgt $\mathbb{X} \setminus \{x_1\} \cup \{x_1'\} = \mathbb{X}'$.

(7) Aus 1.4.1 (3) folgt $p(x_1') = 1$. Sei $i \in \{2, \dots, n\}$. Die Inklusion $R'_{x_i'} \subset R_{x_i}$ zeigt, daß $H' \cap H_{x_i} \supset H'_{x_i'}$ gilt. Aus $(R_{x_i})_{|H'} = R'_{x_i'}$ folgt $H' \cap H_{x_i} \subset H'_{x_i'}$. Es folgt $H' \cap H_{x_i} = H'_{x_i'}$ und somit $H'/H'_{x_i'} \simeq H' + H_{x_i}/H_{x_i} = H/H_{x_i}$. □

KOROLLAR 1.7.2. *Die $\langle p_1\vec{x}_1, \dots, p_n\vec{x}_n\rangle$-graduierte Unteralgebra $k[\pi_1^{p_1}, \dots, \pi_n^{p_n}]$ erfüllt* **(F1)**–**(F3)** *und hat ein homogenes graduiert projektives Spektrum.* □

## 1.8. Beweis von Theorem 1

KOROLLAR 1.8.1. (1) *Es gilt $p_1\vec{x}_1 = \dots = p_n\vec{x}_n$, und $H \simeq \mathbb{L}(\mathbf{p})$, wobei $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$.*

(2) *Es gibt paarweise verschiedene $\lambda_i \in k^*$ mit $\pi_i^{p_i} \sim \pi_1^{p_1} - \lambda_i \pi_2^{p_2}$ $(i = 3, \dots, n)$.*

BEWEIS. Die Unteralgebra $k[\pi_1^{p_1}, \pi_2^{p_2}, \dots, \pi_n^{p_n}]$ von $R$ ist nach 1.6.5 isomorph zu $k[\pi_1^{p_1}, \pi_2^{p_2}]$, und es gilt $p_1\vec{x}_1 = \dots = p_n\vec{x}_n$. Aus Proposition 1.7.1 (1) folgt, daß es in $H$ keine weiteren Relationen gibt, und daher gilt $H \simeq \mathbb{L}(\mathbf{p})$. □

BEWEIS VON THEOREM 1. Wir können ohne Einschränkung annehmen, daß die Gewichte $p_1, \dots, p_n$ sortiert sind, so daß $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_s > 1 = p_{s+1} = \dots = p_n$, und sei $r := \max\{2, s\}$, $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_r)$ und $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_3, \dots, \lambda_r)$. Dann folgt $H \simeq \mathbb{L}(\mathbf{p})$ aus Korollar 1.8.1, und $R = k[\pi_1, \dots \pi_r]$ ist klar. Der kanonische Epimorphismus $\phi : k[X_1, \dots, X_r] \longrightarrow R$, $X_i \mapsto \pi_i$ induziert nach Korollar 1.8.1 einen Epimorphismus $\overline{\phi} : \mathbb{S}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda}) \longrightarrow R$. Die Algebren $R$ und $\mathbb{S}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda})$ haben dieselbe graduierte Krulldimension, und daher ist $\overline{\phi}$ ein Isomorphismus. □

KAPITEL 2

# Auslander-Bündel und präprojektive Algebren

In diesem Kapitel sei $k$ ein beliebiger Körper mit $\operatorname{char} k \neq 2$.

Der Beweis von Theorem 1 über algebraisch abgeschlossenem Körper wurde auf die homogene Situation zurückgeführt, und dort traten nur die Polynomalgebren $k[X,Y]$ auf. Dies ist über beliebigem Grundkörper nicht mehr richtig. Es wird im nächsten Kapitel gezeigt, daß unter einer Zusatzvoraussetzung, die das Geschlecht der Kurve $\mathbb{X}$ betrifft, neben den Polynomalgebren $k[X,Y]$ nur die $\mathbb{Z}$-graduierten Algebren der Form $k[X,Y,Z]/Q(X,Y,Z)$ auftreten, wobei $Q$ eine anisotrope ternäre quadratische Form über $k$ ist. Diesen Typ von Algebren werden wir in diesem Kapitel genauer untersuchen.

Wir zeigen, daß sich die klassische Bijektion zwischen ternären quadratischen Formen und Quaternionenalgebren (die einer Quaternionenalgebren deren Normform der reinen Quaternionen zuordnet ([**42**, Ch. 2, 11.9], ferner [**46**], [**1**])) darstellungstheoretisch interpretieren läßt, indem man das sogenannte Auslander-Bündel untersucht, welches der Mittelterm einer speziellen Auslander-Reiten-Folge ist, sowie die sogenannte kleine präprojektive Algebra zu einer speziellen zahm-erblichen Bimodulalgebra (vgl. auch [**9**], [**8**] für verwandte Resultate). Die Indexmenge der separierenden tubularen Familie über dieser Bimodulalgebra wird durch das projektive Spektrum einer Algebra der Form $k[X,Y,Z]/Q$ beschrieben.

## 2.1. Formulierung der Hauptergebnisse

Um die Hauptergebnisse dieses Kapitels formulieren zu können, benötigen wir einige Begriffe. Es sei $R = k[X,Y,Z]/Q$, wobei $Q$ eine nicht-ausgeartete ternäre quadratische Form über $k$ ist. Eine ternäre quadratische Form heißt *anisotrop*, falls sie keine nicht-trivialen Nullstellen in $k^3$ hat. Der Zusammenhang zur graduierten Faktorialität ist durch einen Satz von Samuel ([**16**, 11.5]) gegeben. Demnach ist die Algebra $R$ genau dann graduiert faktoriell, wenn die quadratische Form $Q$ anisotrop ist; im nicht-faktoriellen Fall ist die Divisorenklassengruppe von der Ordnung zwei (anders ausgedrückt: es gibt zwei Verschiebungsklassen von Linienbündeln). Wir werden für diesen Satz einen darstellungstheoretisch orientierten Beweis liefern.

Sei $\mathbb{X}$ das projektive Spektrum von $R$ und $\operatorname{coh}(\mathbb{X})$ die Kategorie der kohärenten Garben über $\mathbb{X}$ (wie bisher im graduierten Sinn). Wir nennen den Mittelterm der in der Strukturgarbe $\mathcal{O}$ beginnenden Auslander-Reiten-Folge

$$\eta: \ 0 \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{u} \mathcal{A} \xrightarrow{v} \mathcal{O}(1) \longrightarrow 0 \tag{2.1.1}$$

das *Auslander-Bündel*.

Sei $\Lambda$ eine zahm-erbliche $k$-Algebra und $L$ ein unzerlegbarer, präprojektiver $\Lambda$-Rechtsmodul vom Rang 1 (= Defekt $-1$ in der Terminologie von [**10**]). Dann induziert die Auslander-Reiten-Translation $\tau^- = \operatorname{Tr} \mathrm{D}$ auf

$$\Pi(\Lambda, L) = \bigoplus_{n \geq 0} \operatorname{Hom}_\Lambda(L, \tau^{-n} L)$$

die Struktur einer $\mathbb{Z}$-graduierten $k$-Algebra (vgl. [**5**]; für einen anderen Zugang zu präprojektiven Algebren siehe [**13**]). Wir nennen $\Pi(\Lambda, L)$ eine *kleine* präprojektive Algebra von $\Lambda$; sie hängt nur von der Auslander-Reiten-Bahn von $L$ ab.

Wir betrachten nun einen Spezialfall: Sei $F = \left(\frac{a,b}{k}\right)$ eine Quaternionenalgebra über $k$, also die $k$-Algebra in zwei Erzeugern $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ mit den definierenden Relationen

$$\mathbf{i}^2 = a,\ \mathbf{j}^2 = b,\ \mathbf{ij} = -\mathbf{ji},$$

wobei $a$, $b \in k^*$ gilt. Dann ist $F$ entweder ein Schiefkörper oder isomorph zur Matrixalgebra $\mathrm{M}_2(k)$ (vgl. [**26**, Ch. 3, 2.7]). Im ersten Fall sei $\Lambda_F$ die zahm-erbliche Bimodulalgebra $\begin{pmatrix} k & 0 \\ F & F \end{pmatrix}$, im zweiten Fall sei $\Lambda_F$ die Kronecker-Algebra $\begin{pmatrix} k & 0 \\ k^2 & k \end{pmatrix}$ über $k$. In jedem der beiden Fälle sei $P$ der projektive $\Lambda_F$-Rechtsmodul $(k\ 0)$ vom Rang 1, und sei $\Pi(F) = \Pi(\Lambda_F, P)$.

Die Hauptergebnisse des Kapitels sind Theoreme 2, 3 und 4, deren Beweis den Rest des Kapitels einnehmen wird.

THEOREM 2 ([**25**]). *Sei $k$ ein Körper mit* $\operatorname{char} k \neq 2$.

(1) *Ist $Q$ eine anisotrope ternäre quadratische Form über $k$, dann ist der Endomorphismenring des Auslander-Bündels $\mathcal{A}$ ein Quaternionenschiefkörper über $k$.*

(2) *Ist $F = \left(\frac{a,b}{k}\right)$ ein Quaternionenschiefkörper über $k$, so ist die kleine präprojektive Algebra $\Pi(F)$ als $\mathbb{Z}$-graduierte Algebra isomorph zu $k[X,Y,Z]/Q$, wobei $Q = -aX^2 - bY^2 + abZ^2$ anisotrop über $k$ ist.*

(3) *Die Zuordnungen $Q \mapsto \operatorname{End}(\mathcal{A})$ und $F \mapsto \Pi(F)$ aus* (1) *und* (2) *induzieren zueinander inverse Abbildungen zwischen den Ähnlichkeitsklassen von anisotropen ternären quadratischen Formen über $k$ und den Isomorphieklassen von Quaternionenschiefkörpern über $k$.*

Hierbei heißen zwei (ternäre) quadratische Formen $Q_1$ und $Q_2$ *kongruent* [**44**, § 71] ($Q_1 \simeq Q_2$), falls es ein $P \in \mathrm{GL}_3(k)$ gibt mit $Q_1(v) = Q_2(Pv)$ für alle $v \in k^3$, und *ähnlich* ($Q_1 \sim Q_2$), falls es ein $\alpha \in k^*$ gibt mit $Q_1 \simeq \alpha Q_2$.

THEOREM 3 ([**25**]). *Sei $k$ ein Körper mit* $\operatorname{char} k \neq 2$. *Sei $Q$ eine nicht-ausgeartete ternäre quadratische Form über $k$. Dann ist $\mathcal{O} \oplus \mathcal{A}$ ein Kippbündel in* $\operatorname{coh}(\mathbb{X})$, *wobei $\mathcal{A}$ das Auslander-Bündel ist. Weiter gilt:*

(1) *$\mathcal{A}$ ist unzerlegbar genau dann, wenn $Q$ anisotrop ist; ist dies der Fall, so ist der Endomorphismenring von $\mathcal{O} \oplus \mathcal{A}$ die zahme erbliche Algebra $\begin{pmatrix} k & 0 \\ F & F \end{pmatrix}$, wobei $F$ ein Quaternionenschiefkörper über $k$ ist.*

(2) *Falls $\mathcal{A}$ zerlegbar ist, so gibt es ein Linienbündel $\mathcal{L}$ mit $\mathcal{A} = \mathcal{L} \oplus \mathcal{L}$ und* $\operatorname{End}(\mathcal{L}) = k$, *und der Endomorphismenring des Kippbündels $\mathcal{O} \oplus \mathcal{L}$ ist die Kronecker-Algebra über $k$.*

Als Anwendung werden wir die folgende Charakterisierung kommutativer präprojektiver Algebren beweisen. Zur Definition von zahmen Bimoduln und ihrem Typ vgl. [**10**] bzw. Anhang C. Für eine $\mathbb{Z}$-graduierte Algebra $R = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} R_n$ bezeichnen wir mit $R^{(2)}$ die $\mathbb{Z}$-graduierte Algebra $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} R_{2n}$.

THEOREM 4 ([**25**]). *Sei $k$ ein Körper mit* $\operatorname{char} k \neq 2$. *Sei $\Lambda$ eine zahm-erbliche Bimodulalgebra* $\begin{pmatrix} F & 0 \\ M & G \end{pmatrix}$. *Sei $P$ ein projektiver $\Lambda$-Rechtsmodul vom Rang* 1. *Dann ist die kleine präprojektive Algebra*

$$\Pi(P) = \Pi(\Lambda, P) = \bigoplus_{n \geq 0} \operatorname{Hom}_\Lambda(P, \tau^{-n} P)$$

*kommutativ genau dann, wenn es eine endliche Körpererweiterung $K$ von $k$ gibt, so daß als $\mathbb{Z}$-graduierte Algebren entweder*

(1) $\Pi(P) \simeq K[X, Y, Z]/Q$, *wobei $Q$ eine anisotrope ternäre quadratische Form über $K$ von der Gestalt $-aX^2 - bY^2 + abZ^2$ ($a$, $b \in K^*$) ist und*

(a) $K \simeq F$, $G \simeq \left(\frac{a, b}{K}\right)$ *und $M \simeq G$ ist vom Typ* $(1, 4)$, *oder*
(b) $K \simeq G$, $F \simeq \left(\frac{a, b}{K}\right)$ *und $M \simeq F$ ist vom Typ* $(4, 1)$;

*oder*

(2) $\Pi(P) \simeq K[X, Y]^{(2)}$, *wobei* $K \simeq F \simeq G$, $M \simeq K \oplus K$ *vom Typ* $(2, 2)$ *und $\Lambda$ die Kronecker-Algebra über $K$ ist.*

## 2.2. Das Auslander-Bündel

Wir behalten die Notation des vorherigen Abschnitts bei. Insbesondere ist $Q = Q(X, Y, Z)$ eine nicht-ausgeartete ternäre quadratische Form über $k$ und $R = k[X, Y, Z]/Q(X, Y, Z)$.

Die Nicht-Ausgeartetheit von $Q$ ist äquivalent dazu, daß $R$ eine isolierte Singularität ist, was genau dann der Fall ist, wenn $R$ ein normaler Integritätsbereich ist (vgl. [**47**, Ch. 14], auch zum Zusammenhang zu Auslander-Reiten-Folgen).

Insbesondere ist $R$ also graduiert normal und erfüllt die Bedingungen **(N)**, **(F2)** und **(F3)** aus dem ersten Kapitel. Man kann (nach einer nicht-singulären, homogenen linearen Substitution der Variablen, vgl. [**26**, p. 2]) annehmen, daß $Q$ von der Form $aX^2 + bY^2 + cZ^2$ ist, wobei (wegen der Nicht-Ausgeartetheit) $a$, $b$, $c$ Elemente aus $k \setminus \{0\}$ sind.

Da $R$ von Elementen des Grades 1 erzeugt wird, ist die Kategorie der ungraduierten kohärenten Garben über $\mathbb{X}$ (wie in [**22**]) äquivalent zur Kategorie der graduierten kohärenten Garben, wie wir sie hier betrachten. Daher erhält man auch

LEMMA 2.2.1 (Homogenität). *Für jede einfache Garbe $\mathcal{S}$ gilt $\mathcal{S}(n) \simeq \mathcal{S}$ für jedes $n \in \mathbb{Z}$, bzw.* (*was dasselbe ist*) $\operatorname{Ext}^1_{\mathbb{X}}(\mathcal{S}, \mathcal{S}) \neq 0$. □

In Abschnitt 1.6 hatten wir den Grad einer kohärenten Garbe definiert. Dort war die zugrundeliegende Algebra graduiert faktoriell, und es galt die Formel $\deg(\mathcal{O}(n)) = n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. In diesem Abschnitt wird nun der Grad für eine kohärente Garbe definiert, wobei $R$ auch nicht-faktoriell sein kann. Damit die genannte Formel weiterhin gilt, muß man mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ normieren. Setze

$$\deg(\mathcal{F}) = \frac{1}{2} \cdot \langle \mathcal{O}, \mathcal{F} \rangle - \frac{1}{2} \cdot \operatorname{rk}(\mathcal{F})$$

für jedes $\mathcal{F} \in \operatorname{coh}(\mathbb{X})$, und bezeichne die induzierte Linearform auf der Grothendieck-Gruppe in die Gruppe $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ ebenfalls mit deg.

Für jedes Vektorbündel $\mathcal{F} \neq 0$ hat man den Anstieg $\mu(\mathcal{F}) = \frac{\deg(\mathcal{F})}{\mathrm{rk}(\mathcal{F})}$. Diesbezüglich kann man Stabilität und Semistabilität erklären: Ein Vektorbündel $\mathcal{F} \neq 0$ heißt *stabil* (bzw. *semistabil*), falls für jedes Vektorbündel $\mathcal{G} \neq 0$ mit $\mathcal{G} \subsetneqq \mathcal{F}$ die Beziehung $\mu(\mathcal{G}) < \mu(\mathcal{F})$ (bzw. $\mu(\mathcal{G}) \leq \mu(\mathcal{F})$) gilt. Da die dualisierende Garbe negativen Grad hat (vgl. Abschnitt 1.2), folgt

LEMMA 2.2.2 (Stabilität). *Jedes unzerlegbare Vektorbündel ist stabil. Insbesondere hat jedes unzerlegbare Vektorbündel einen Schiefkörper als Endomorphismenring und hat außerdem keine Selbsterweiterungen.*

BEWEIS. Geigle-Lenzing [**18**, Prop. 5.2 + 5.5]. □

Sei $\overline{k}$ der algebraische Abschluß des Körpers $k$. Wir bezeichnen den Prozeß des Tensorierens mit $\overline{k}$ über $k$ als Skalar-Erweiterung. Es sei $\overline{\mathbb{X}} = \mathbb{X} \times_k \overline{k}$ und $\overline{R} = R \otimes_k \overline{k} = \overline{k}[X,Y,Z]/Q$.

Sei $\overline{\cdot} : \mathrm{coh}(\mathbb{X}) \longrightarrow \mathrm{coh}(\overline{\mathbb{X}})$ der Funktor mit $\mathcal{F} \mapsto \overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \otimes_k \overline{k}$. Es gibt immer einen kanonischen Isomorphismus $\mathrm{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{G}) \otimes \overline{k} \longrightarrow \mathrm{Hom}(\overline{\mathcal{F}},\overline{\mathcal{G}})$ (für alle $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathrm{coh}(\mathbb{X})$).

Wir wiederholen einige bekannte Fakten über Quaternionenalgebren. Eine Quaternionenalgebra $\left(\frac{a,b}{k}\right)$ ist immer eine vierdimensionale zentraleinfache $k$-Algebra mit $k$-Basis $\mathbf{1}$, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{ij}$. Umgekehrt ist jede vierdimensionale zentraleinfache $k$-Algebra isomorph zu einer Quaternionenalgebra [**42**, Ch. 8, 6.5]. $\left(\frac{a,b}{k}\right)$ ist genau dann ein Schiefkörper, wenn die assoziierte Normform (der reinen Quaternionen) $-aX^2 - bY^2 + abZ^2$ anisotrop über $k$ ist [**42**, Ch. 2, 11.10+11.14]; andernfalls ist $\left(\frac{a,b}{k}\right)$ isomorph zum vollen $2 \times 2$ Matrixring $\mathrm{M}_2(k)$.

PROPOSITION 2.2.3. (1) *Es gilt* $\mathrm{End}_{\mathbb{X}}(\mathcal{A}) \otimes_k \overline{k} \simeq \mathrm{End}_{\overline{\mathbb{X}}}(\overline{\mathcal{A}}) \simeq \mathrm{M}_2(\overline{k})$*, also ist* $\mathrm{End}_{\mathbb{X}}(\mathcal{A})$ *eine Quaternionenalgebra über* $k$*.*

(2) *Angenommen, das Auslander-Bündel* $\mathcal{A}$ *ist zerlegbar. Dann gibt es ein Linienbündel* $\mathcal{L} \in \mathrm{coh}(\mathbb{X})$ *mit* $\mathrm{End}(\mathcal{L}) = k$*, so daß* $\mathcal{A} = \mathcal{L} \oplus \mathcal{L}$ *gilt. Jedes Linienbündel in* $\mathrm{coh}(\mathbb{X})$ *ist isomorph zu* $\mathcal{O}(n)$ *oder* $\mathcal{L}(n)$ *für ein* $n \in \mathbb{Z}$*.*

(3) *Das Auslander-Bündel* $\mathcal{A}$ *ist unzerlegbar genau dann, wenn* $R$ *graduiert faktoriell ist.*

BEWEIS. (1), (2) Mit Skalar-Erweiterung erhält man $\overline{R} \simeq \overline{k}[X,Y,Z]/(Z^2 - XY) \simeq \overline{k}[X,Y]^{(2)}$, und deshalb $\mathrm{coh}(\overline{\mathbb{X}}) \simeq \mathrm{coh}(\mathbb{P}_1(\overline{k}))$. Außerdem zeigt Skalar-Erweiterung $\mathrm{End}_{\mathbb{X}}(\mathcal{A}) \otimes_k \overline{k} \simeq \mathrm{End}_{\overline{\mathbb{X}}}(\overline{\mathcal{A}})$, und angewendet auf die Auslander-Reiten-Folge $\eta$ in (2.1.1) erhält man eine nicht-aufspaltende exakte Folge

$$\overline{\eta}:\ 0 \longrightarrow \overline{\mathcal{O}} \longrightarrow \overline{\mathcal{A}} \longrightarrow \overline{\mathcal{O}}(1) \longrightarrow 0.$$

Wegen $\dim_{\overline{k}} \mathrm{Ext}^1_{\overline{\mathbb{X}}}(\overline{\mathcal{O}}, \overline{\mathcal{O}}(1)) = 1$ ist $\overline{\eta}$ auch eine Auslander-Reiten-Folge. In $\mathrm{coh}(\mathbb{P}_1(\overline{k}))$ gilt $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{N} \oplus \mathcal{N}$ für ein Linienbündel $\mathcal{N} \in \mathrm{coh}(\mathbb{P}_1(\overline{k}))$, und es folgt $\mathrm{End}(\overline{\mathcal{A}}) \simeq \mathrm{M}_2(\overline{k})$. Die letzte Behauptung in (1) folgt aus [**26**, Ch. 3,1.1].

Sei $\mathcal{A}$ zerlegbar. Dann gibt es Linienbündel $\mathcal{L}_1$ und $\mathcal{L}_2$ mit $\mathcal{A} \simeq \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$. Man erhält $\overline{\mathcal{L}_1} \simeq \overline{\mathcal{L}_2}$, insbesondere $\mathrm{Hom}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) \otimes \overline{k} \simeq \mathrm{Hom}(\overline{\mathcal{L}_1}, \overline{\mathcal{L}_2}) \neq 0$ und daher $\mathrm{Hom}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) \neq 0$. Skalar-Erweiterung bewahrt Rang und Grad, insbesondere den Anstieg $\mu$. Es folgt $\mu(\mathcal{L}_1) = \mu(\mathcal{L}_2)$, also $\mathcal{L}_1 \simeq \mathcal{L}_2$ wegen Stabilität.

Ist $\mathcal{M}$ ein Linienbündel in $\operatorname{coh}(\mathbb{X})$, so ist $\mu(\mathcal{M}) \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, und $\overline{\mathcal{M}}$ ist isomorph zu $\overline{\mathcal{O}}(n)$ oder $\mathcal{N}(n)$ für ein $n \in \mathbb{Z}$. Obige Argumente zeigen $\mathcal{M} \simeq \mathcal{O}(n)$ oder (nur wenn $\mathcal{A}$ zerlegbar ist) $\mathcal{M} \simeq \mathcal{L}(n)$ für ein $n \in \mathbb{Z}$.

(3) Sei $\mathcal{A}$ unzerlegbar. Nach obigen Argumenten ist jedes Linienbündel isomorph zu $\mathcal{O}(n)$ für ein $n \in \mathbb{Z}$. Dann ist $R$ graduiert faktoriell (vgl. 1.2.5). Ist umgekehrt $R$ graduiert faktoriell und $\mathcal{A}$ zerlegbar, so zerlegt sich $\mathcal{A}$ in $\mathcal{O}(n) \oplus \mathcal{O}(m)$, und dann folgt $0 < n, m < 1$, Widerspruch. □

Proposition 2.2.4. *$\mathcal{T} = \mathcal{O} \oplus \mathcal{A}$ ist ein Kippbündel.*

Beweis. Aus $\mu(\mathcal{O}) = 0$ und $\mu(\mathcal{A}) = \frac{1}{2}$ folgt mit Serre-Dualität und aus Stabilitätsgründen leicht $\operatorname{Ext}^1(\mathcal{T}, \mathcal{T}) = 0$.

Sei $\mathcal{C}$ eine volle Unterkategorie von $\operatorname{coh}(\mathbb{X})$, die $\mathcal{O}$ und $\mathcal{A}$ enthält, und die mit zwei Termen einer kurzen exakten Sequenz auch den dritten Term enthält und abgeschlossen ist gegen direkte Summanden. Es genügt zu zeigen: $\mathcal{C} = \operatorname{coh}(\mathbb{X})$. Es ist auch $\mathcal{O}(1) \in \mathcal{C}$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

(1) $\mathcal{A}$ unzerlegbar. Dann ist $R$ graduiert faktoriell, und jedes Primelement in $R_1$ induziert durch Bildung des Cokerns der zugehörigen Multiplikation eine einfache Garbe $\mathcal{S}'$ (vgl. 1.4.1). Wegen der Homogenität von $\mathcal{S}'$ folgt, daß auch alle $\mathcal{O}(n)$ ($n \in \mathbb{Z}$) in $\mathcal{C}$ liegen. Da alle einfachen Garben Cokerne von Monomorphismen zwischen Linienbündeln sind (nach 1.4.1), ist dann auch jede einfache Garbe in $\mathcal{C}$.

(2) $\mathcal{A} = \mathcal{L} \oplus \mathcal{L}$. Dann ist $\mathcal{L} \in \mathcal{C}$. Es gibt ein $f \in \operatorname{Hom}(\mathcal{O}, \mathcal{L})$, $f \neq 0$. Dann ist $f$ 1-irreduzibel, also ist der Cokern $\mathcal{S}$ von $f$ einfach, und $\mathcal{S} \in \mathcal{C}$. Wegen der Homogenität folgt dann $\mathcal{L}(1) \in \mathcal{C}$. Ebenso ist $\operatorname{Hom}(\mathcal{L}, \mathcal{O}(1)) \neq 0$. Nimmt man hieraus einen Monomorphismus, so ist der Cokern einfach, und wegen Homogenität folgt $\mathcal{O}(2) \in \mathcal{C}$. Induktiv folgt so, daß $\mathcal{O}(n), \mathcal{L}(n) \in \mathcal{C}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt, also sind alle Linienbündel in $\mathcal{C}$. Da alle einfachen Garben Cokerne von Linienbündeln sind, sind auch alle einfachen Garben in $\mathcal{C}$. □

Wir notieren einfache Folgerungen. Sei $\mathcal{E}$ ein unzerlegbarer direkter Summand von $\mathcal{A}$ (also $\mathcal{E} = \mathcal{A}$ oder $\mathcal{E} = \mathcal{L}$).

Korollar 2.2.5. *$\mathcal{O} \oplus \mathcal{E}$ ist ein Kippbündel.* □

Korollar 2.2.6. $\mathrm{K}_0(\mathbb{X}) = \mathbb{Z}[\mathcal{O}] \oplus \mathbb{Z}[\mathcal{E}]$. □

Korollar 2.2.7. *$\mathcal{O}$ und $\mathcal{E}$ sind bis auf Verschiebung die einzigen unzerlegbaren Vektorbündel.* □

Beweis. Ist $\mathcal{F}$ ein unzerlegbares Vektorbündel, so gibt es ein $n \in \mathbb{Z}$, so daß $0 \leq \mu(\mathcal{F}(n)) < 1$ gilt. Zu zeigen genügt daher: Sind $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_t$ paarweise nicht-isomorphe unzerlegbare Vektorbündel mit Anstieg $0 \leq \mu\mathcal{F}_i < 1$, so gilt $t \leq |\,\mathrm{K}_0(\mathbb{X})|$ $(= 2)$: Man kann $\mu\mathcal{F}_1 \leq \mu\mathcal{F}_2 \leq \cdots \leq \mu\mathcal{F}_t$ annehmen. Wegen

$$\mathrm{D}\operatorname{Ext}^1(\mathcal{F}_i, \mathcal{F}_j) \simeq \operatorname{Hom}(\mathcal{F}_j, \mathcal{F}_i(-1)) = 0$$

gilt

$$\langle \mathcal{F}_i, \mathcal{F}_j \rangle = \dim \operatorname{Hom}(\mathcal{F}_i, \mathcal{F}_j).$$

Sei $i < j$. Dann gilt $\langle \mathcal{F}_j, \mathcal{F}_i \rangle = 0$: Falls $\mu\mathcal{F}_i < \mu\mathcal{F}_j$, so ist dies klar; sind die Anstiege gleich, so sind $\mathcal{F}_i$ und $\mathcal{F}_j$ einfache Objekte in der Unterkategorie des entsprechenden

Anstiegs, und $\langle \mathcal{F}_j, \mathcal{F}_i \rangle = 0$ folgt dann aus dem Lemma von Schur. Daraus ergibt sich leicht die lineare Unabhängigkeit der Klassen $[\mathcal{F}_1], \dots, [\mathcal{F}_t]$. □

## 2.3. Die kleine präprojektive Algebra

PROPOSITION 2.3.1. *Sei $R = k[X,Y,Z]/Q$, wobei $Q$ eine nicht-ausgeartete ternäre quadratische Form über $k$ ist, und sei $F$ der Endomorphismenring des Auslander-Bündels $\mathcal{A}$. Dann sind $R$ und $\Pi(F)$ isomorph als $\mathbb{Z}$-graduierte Algebren.*

BEWEIS. Sei $\Lambda = \Lambda_F$, und sei $\mathcal{T} = \mathcal{O} \oplus \mathcal{E}$ das Kippbündel aus dem vorherigen Abschnitt. Dann ist $\mathrm{End}(\mathcal{T}) = \Lambda$, $\mathrm{Hom}(\mathcal{T}, \mathcal{O}) = P$, und aus der Kipptheorie erhält man eine volle Einbettung

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{T}, -) : \mathrm{add}\{\tau^{-n}\mathcal{T} \mid n \geq 0\} \longrightarrow \mathrm{mod}(\Lambda),$$

welche Auslander-Reiten-Translationen bewahrt. Dann folgt

$$R \simeq \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{X}}(\mathcal{O}, \mathcal{O}(n)) \simeq \bigoplus_{n\geq 0} \mathrm{Hom}_{\Lambda}(P, \tau^{-n}P) = \Pi(F).$$

□

KOROLLAR 2.3.2. *Sei $Q$ eine nicht-ausgeartete ternäre quadratische Form über $k$ und $R = k[X,Y,Z]/Q$. Dann ist $R$ graduiert faktoriell, genau wenn $Q$ anisotrop ist.*

BEWEIS. "$\Longrightarrow$" Ist $Q$ isotrop, so ist $Q \sim Z^2 - XY$, also $R \simeq k[X,Y,Z]/(Z^2 - XY) \simeq k[X^2, XY, Y^2]$, welche nicht graduiert faktoriell ist, da $X^2$, $Y^2$ und $XY$ irreduzibel, aber $X^2Y^2 = (XY)^2$ zwei verschiedene Zerlegungen in irreduzible Elemente sind.

"$\Longleftarrow$" Sei $R$ nicht graduiert faktoriell. Sei $F$ der Endomorphismenring des Auslander-Bündels. Dann ist $\Lambda_F$ die Kronecker-Algebra über $k$. Aus 2.3.1 erhält man $R \simeq k[X,Y]^{(2)} \simeq k[X,Y,Z]/(Z^2 - XY)$, also ist $Q \sim Z^2 - XY$ isotrop. □

Aus 2.3.2 und 2.2.3 erhält man einen neuen Beweis für den Satz [**16**, 11.5] von Samuel. Die nächste Aussage ist entscheidend für den Beweis von Theorem 2.

PROPOSITION 2.3.3. *Sei $R = k[X,Y,Z]/Q$, wobei $Q$ eine nicht-ausgeartete ternäre quadratische Form über $k$ ist, und sei $F$ der Endomorphismenring des Auslander-Bündels $\mathcal{A}$. Falls $Q \sim -aX^2 - bY^2 + abZ^2$, so ist $F \simeq \left(\frac{a,b}{k}\right)$.*

BEWEIS. Der isotrope Fall ist trivial. Wir nehmen also an, daß $Q$ anisotrop ist. Nach 2.2.3 ist $F$ eine Quaternionenalgebra, etwa $F \simeq \left(\frac{a',b'}{k}\right)$, $\mathbf{i}^2 = a'$, $\mathbf{j}^2 = b'$, $\mathbf{ij} = -\mathbf{ji}$. Nach 2.3.2 und 2.2.3 ist $\mathcal{A}$ unzerlegbar. Betrachte die Auslander-Reiten-Folge

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{O}(1)^{(4)} \longrightarrow \mathcal{A}(1) \longrightarrow 0,$$

wobei $f$ aus den Komponenten $f_1 = v$, $f_2 = v\mathbf{i}$, $f_3 = v\mathbf{j}$, $f_4 = v\mathbf{ij}$ besteht ($u$ und $v$ sind die Morphismen in der Auslander-Reiten-Folge $\eta$ aus (2.1.1)). Sei $M = \mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{O}(1))$, $N = \mathrm{Hom}(\mathcal{O}(1), \mathcal{A}(1))$ und ${}^*M$ das $k$-Dual von $M$, und sei $\phi_1$, $\phi_2$, $\phi_3$, $\phi_4 \in {}^*M$ die Dualbasis von $f_1$, $f_2$, $f_3$, $f_4 \in M$. Sei $\sigma : {}^*M \longrightarrow N$ die kanonische Einbettung wie in [**13**]. Nach [**13**] sind $\sigma(\phi_1)$, $\sigma(\phi_2)$, $\sigma(\phi_3)$, $\sigma(\phi_4)$ die Komponenten von $h$, und es gilt

$$\sum_{i=1}^{4} \sigma(\phi_i) f_i = 0.$$

Betrachte die $k$-Basis $g_1 = u(1)$, $g_2 = \mathbf{i}(1)u(1)$, $g_3 = \mathbf{j}(1)u(1)$, $g_4 = \mathbf{ij}(1)u(1)$ von $N$ (hierbei bezeichnet $f(1)$ den Morphismus in $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}(1), \mathcal{G}(1))$, der zu $f \in \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ assoziiert ist; wir schreiben manchmal auch einfach $f$ statt $f(1)$). Sei $x := v\mathbf{i}u$, $y := v\mathbf{j}u$, $z := v\mathbf{ij}u \in \mathrm{Hom}(\mathcal{O}, \mathcal{O}(1)) = R_1$. Wir zeigen $R = k[x, y, z] \simeq k[X, Y, Z]/(-a'X^2 - b'Y^2 + a'b'Z^2)$. Hieraus wird $\left(\frac{a', b'}{k}\right) \simeq \left(\frac{a, b}{k}\right)$ und daher die Behauptung folgen. Es genügt zu zeigen, daß eine Relation (ähnlich zu) $-a'x^2 - b'y^2 + a'b'z^2 = 0$ gilt (als Morphismen gilt $x^2 = x(1)x$ etc. nach unserer Konvention). Seien $\alpha_{ij} \in k$, so daß $g_i = \sum_{j=1}^4 \alpha_{ij}\sigma(\phi_j)$. Dann gilt $\alpha_{ij} = \sigma^{-1}(g_i)(f_j)$. Für alle $f \in M$, $g \in N$, $h \in \mathrm{End}(\mathcal{A})$ gilt

$$\sigma^{-1}(h(1)g)(f) = \sigma^{-1}(g)(fh).$$

Im folgenden können wir ohne Einschränkung $\alpha_{11} = 1$ annehmen. Es ergibt sich damit, daß $A = (\alpha_{ij})$ und die Inverse $A^{-1} = (\beta_{ij})$ die folgende Gestalt haben

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & a' & -\gamma & -a'\beta \\ \beta & \gamma & b' & b'\alpha \\ \gamma & a'\beta & -b'\alpha & -a'b' \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{d}\begin{pmatrix} a'b' & -\alpha b' & -a'\beta & \gamma \\ -\alpha b' & b' & \gamma & -\beta \\ -a'\beta & -\gamma & a' & \alpha \\ \gamma & \beta & -\alpha & -1 \end{pmatrix}$$

mit $d = a'b' - \alpha^2 b' - \beta^2 a' + \gamma^2 = \frac{1}{a'b'}|a'b'\mathbf{1} + \alpha b'\mathbf{i} + \beta a'\mathbf{j} + \gamma\mathbf{ij}| \neq 0$ (da $Q$ anisotrop ist [**26**, Ch. 3, 2.4]). Wir erhalten

$$0 = d \cdot \sum_{i=1}^{4} \sigma(\phi_i) f_i = v(1) \left( \sum_{i,j=1}^{4} d\beta_{ij} g_j f_i \right) u \overset{(*)}{=} v(1) \left( \sum_{i,j=2}^{4} d\beta_{ij} g_j f_i \right) u = b'x^2 + a'y^2 - z^2,$$

wobei die Gleichheit $(*)$ wegen $vu = 0$ folgt. Multiplikation mit $-a'b'$ liefert nun die Behauptung. □

Ein ähnliches Ergebnis wurde in [**4**] mit völlig anderen Mitteln erzielt.

## 2.4. Beweise der Hauptergebnisse

Wir haben nun alle Mittel beisammen, um Theoreme 2–4 beweisen zu können.

Beweis von Theorem 2. (1) Folgt aus den Sätzen 2.2.3 und 2.3.2.

(2) Folgt aus den Sätzen 2.3.1 und 2.3.3.

(3) Seien $Q_1$ und $Q_2$ ternäre quadratische Formen über $k$. Die $\mathbb{Z}$-graduierten $k$-Algebren $k[X, Y, Z]/Q_1$ und $k[X, Y, Z]/Q_2$ sind offenbar genau dann isomorph, wenn $Q_1$ und $Q_2$ ähnlich sind. Jede (nicht-ausgeartete) ternäre quadratische Form ist ähnlich zu einer der Gestalt $-aX^2 - bY^2 + abZ^2$. Zwei quadratische Formen $-aX^2 - bY^2 + abZ^2$ und $-a'X^2 - b'Y^2 + a'b'Z^2$ sind ähnlich, genau wenn sie kongruent sind, und dies gilt, genau wenn die Algebren $\left(\frac{a, b}{k}\right)$ und $\left(\frac{a', b'}{k}\right)$ isomorph sind [**42**, Ch. 2, 11.9]. Also induzieren die Zuordnungen $Q \mapsto \mathrm{End}(\mathcal{A})$ und $F \mapsto \Pi(F)$ Abbildungen auf den Klassen, und nach 2.3.1 und 2.3.3 sind diese zueinander invers. □

Beweis von Theorem 3. Folgt aus den Sätzen 2.2.3, 2.2.4 und 2.3.2. □

Beweis von Theorem 4. Angenommen, $R := \Pi(P)$ ist kommutativ. Sei $K := \mathrm{End}(P) = R_0$. Dann ist $R$ eine kommutative, positiv $\mathbb{Z}$-graduierte $K$-Algebra. $R$ ist außerdem endlich erzeugt als $K$-Algebra: Da jeder Morphismus $f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(P, \tau^{-n}P) \setminus \{0\}$ $(n > 0)$ eine Summe von Kompositionen von irreduziblen Morphismen zwischen unzerlegbaren $\Lambda$-Rechtsmoduln ist, welche notwendig präprojektiv sind, erhalten wir $R = K[R_1]$ wegen der speziellen Gestalt der präprojektiven Komponente von $\Lambda$, und $R_1$ ist dreidimensional über $K$. Da jeder Morphismus $\neq 0$ zwischen präprojektiven $\Lambda$-Moduln vom Rang 1 ein Monomorphismus ist, ist $R$ graduiert integer. Sei $\mathbb{X} = \operatorname{Proj}(R)$ das projektive Spektrum von $R$. Nach [**28**, 4.10] und [**19**, 8.1] ist $R$ graduiert Cohen-Macaulay, und nach [**19**, 7.3]

$$\operatorname{coh}(\mathbb{X}) \simeq \frac{\operatorname{mod}^{\mathbb{Z}}(R)}{\operatorname{mod}_0^{\mathbb{Z}}(R)} \simeq \frac{\operatorname{mod}^{\mathbb{Z}}(\Pi(\Lambda))}{\operatorname{mod}_0^{\mathbb{Z}}(\Pi(\Lambda))},$$

wobei $\Pi(\Lambda) = \bigoplus_{n \geq 0} \operatorname{Hom}_\Lambda(\Lambda, \tau^{-n}\Lambda)$ die präprojektive Algebra ist, die zum Auslander-Reiten-Orbit von $\Lambda$ gebildet wird. Außerdem zeigt dies:

(1) Ist $M$ vom Typ $(1,4)$ bzw. $(4,1)$, so sind alle Linienbündel in $\operatorname{coh}(\mathbb{X})$ von der Form $\mathcal{O}(n)$ $(n \in \mathbb{Z})$;
(2) ist $M$ vom Typ $(2,2)$, gibt es zwei Verschiebungsklassen von Linienbündeln in $\operatorname{coh}(\mathbb{X})$.

Mit [**5**] folgt, daß $R$ von graduierter Krulldimension zwei ist, und ferner, daß $\operatorname{mod}^{\mathbb{Z}}(R_x)$ eine erbliche Kategorie ist, wobei $R_x$ die graduierte Lokalisierung von $R$ im abgeschlossenen Punkt $x \in \mathbb{X}$ ist. Deshalb ist jede Lokalisierung $R_x$ ein graduierter Dedekindring, insbesondere ein graduiert normaler Ring. Daher ist auch $R$ selbst graduiert normal (vgl. [**16**, 4.1]).

Wegen $\dim_K R_1 = 3$ und $\dim_K R_2 = 5$ erhalten wir $R \simeq K[X,Y,Z]/Q$, wobei $Q$ eine quadratische Form über $K$ ist. Da $R$ graduiert normal ist, ist $Q$ nicht-ausgeartet. Im Fall (1) ist $R$ graduiert faktoriell, d. h. $Q$ ist anisotrop. Im Fall (2) ist $R$ nicht graduiert faktoriell, d. h. $Q$ ist isotrop, also $R \simeq K[X,Y,Z]/(Z^2 - XY) \simeq K[X,Y]^{(2)}$. Der Satz folgt nun aus Theorem 2 und Theorem 3. $\square$

KAPITEL 3

# Graduiert faktorielle Algebren, allgemeiner Fall

## 3.1. Die Charakterisierung

In diesem Kapitel sei $k$ ein beliebiger Körper. Um technische Schwierigkeiten im Umgang mit quadratischen Formen zu vermeiden, nehmen wir stets an, daß $\operatorname{char} k \neq 2$ gilt.

Wir zeigen, wie das Hauptergebnis aus dem ersten Kapitel ausgedehnt werden kann. Über algebraisch abgeschlossenen Körper $k$ verlief die Beschreibung in vielerlei Hinsicht optimal:

- **(1):** Alle kommutativen graduierten Algebren, die **(F1)**–**(F3)** erfüllten, können klassifiziert werden;
- **(2):** Alle homogenen Primelemente in diesen Algebren können explizit angeben werden;
- **(3):** Es können über dem Grundkörper die Geometrien der Indexmengen sämtlicher separierender tubularer Familien durch graduiert faktorielle Algebren kontrolliert werden.

Über beliebigem Körper werden wir solche Ergebnisse nicht erzielen können. Die Punkte **(1)** und **(2)** sind von gleicher Schwierigkeit und hängen stark von der Arithmetik des Grundkörpers ab. Im algebraisch abgeschlossenen Fall war ja die genaue Kenntnis der homogenen Primelemente in der Polynomalgebra $k[X, Y]$ entscheidend. Jedoch ist es aussichtslos, solche Kenntnisse über beliebigem Körper zu bekommen.

Dennoch gelingt es, unter einer Zusatzvoraussetzung, die das Geschlecht der Kurve $\mathbb{X}$ betrifft, in der *homogenen* Situation eine Klassifikation wie in **(1)** vorzunehmen. Es treten nämlich neben den Polynomalgebren $k[X, Y]$ genau die Algebren der Form $k[X, Y, Z]/Q(X, Y, Z)$ auf, wobei $Q(X, Y, Z)$ eine anisotrope ternäre quadratische Form über $k$ ist. Dies erlaubt auch, über reell abgeschlossenem Körper alle auftretenden graduiert faktoriellen Algebren explizit anzugeben.

Punkt **(3)** läßt sich über beliebigem Grundkörper, auch mit der genannten Zusatzvoraussetzung, nicht mehr realisieren. Denn es wird aus den Ergebnissen dieses Kapitels (vgl. 3.2.2) folgen, daß z. B. die reelle Bimodulalgebra $\begin{pmatrix} \mathbb{C} & 0 \\ \mathbb{C} \oplus \overline{\mathbb{C}} & \mathbb{C} \end{pmatrix}$ nicht durch eine kommutative Algebra, die **(F1)**–**(F3)** erfüllt, realisierbar ist. Dazu müßte man den Begriff der Faktorialität ausdehnen auf nicht-kommutative Algebren, was in dieser Arbeit nicht unternommen wird.

Das Hauptergebnis dieses Kapitels wird die folgende Aussage sein. Der Beweis und die Erläuterung der Begriffe werden in den folgenden Abschnitten geliefert.

THEOREM 5 ([**25**]). *Sei $k$ ein Körper mit* $\operatorname{char} k \neq 2$ *und $H$ eine endlich erzeugte abelsche Gruppe vom Rang* 1. *Sei $R$ eine $H$-graduierte* homogene *faktorielle $k$-Algebra. Dann sind äquivalent:*

(1) *Das Geschlecht der Kurve* $\mathbb{X}$ *ist null.*
(2) *Die Kategorie* $\operatorname{vect}^H(\mathbb{X})$ *ist von* rk-*beschränktem Darstellungstyp.*
(3) $H \simeq \mathbb{Z}$*,* $R = k[R_1]$*, und der Typ* $\varepsilon$ *der Kurve* $\mathbb{X}$ *ist* 1 *oder* 2*.*
(4) $H \simeq \mathbb{Z}$*, und als graduierte Algebren gilt entweder*
(a) $R \simeq k[X,Y]$*, die Polynomalgebra graduiert durch Totalgrad, oder*
(b) $R \simeq k[X,Y,Z]/Q(X,Y,Z)$*, graduiert durch Totalgrad, wobei* $Q(X,Y,Z)$ *eine anisotrope quadratische Form über* $k$ *ist.*

Offen muß hier bleiben, ob mit den Voraussetzungen des Theorems die Bedingung, daß das Geschlecht null ist, schon automatisch folgt. Jedoch ist sie äquivalent zu der Existenz eines Kippbündels in $\operatorname{coh}^H(\mathbb{X})$ (siehe 3.4.3), und in den darstellungstheoretischen Situationen, die wir untersuchen wollen (versteckt-kanonische Algebren, d. h. Algebren mit separierender tubularer Familie), gibt es immer Kippbündel ([**32**]). Ferner ist sie automatisch erfüllt, wenn $k$ algebraisch abgeschlossen ist.

Ferner werden wir beschreiben, wie man aus diesem speziellen Typ graduiert faktorieller Algebren durch sogenanntes Einfügen von Gewichten weitere graduiert faktorielle Algebren $R$ konstruieren kann, die **(F1)**–**(F3)** erfüllen. Wir werden die Grothendieck-Gruppe von $\operatorname{coh}^H(\mathbb{X})$ beschreiben und zeigen, daß mittels einer Kippbündelkonstruktion wie in [**32**] $R$ eine kanonische Algebra ([**40**]) zugeordnet ist.

In diesem Kapitel sei, falls nichts anderes gesagt wird, $H$ eine endlich erzeugte abelsche Gruppe vom Rang 1 und $R$ eine kommutative $H$-graduierte $k$-Algebra, die die Bedingungen **(F1)**–**(F3)** erfüllt. Sei $\mathbb{X} = \operatorname{Proj}^H(R)$ das graduierte projektive Spektrum von $R$. Wir interessieren uns hier in erster Linie für den Fall, daß für die Strukturgarbe $\operatorname{Ext}^1_{\mathbb{X}}(\mathcal{O},\mathcal{O}) = 0$ gilt. Wir machen aber zunächst diese Einschränkung nicht.

Wir nehmen wieder $R = k[\pi_1,\ldots,\pi_n]$ an, wobei die $\pi_i$ homogen prim und paarweise nicht-assoziiert sind, $x_i \in \mathbb{X}$ seien die entsprechenden Punkte vom Gewicht $p_i = p(x_i)$, $\vec{x}_i$ deren Grade und $\mathcal{S}_i$ einfache Garben, die in $x_i$ konzentriert sind.

## 3.2. Homogene faktorielle Algebren

Sei $H$ eine endlich erzeugte abelsche Gruppe vom Rang 1 und $R$ eine $H$-graduierte $k$-Algebra, die die Bedingungen **(F1)**–**(F3)** erfüllt. Wir betrachten die folgende Zusatzbedingung.

**(Homogenität):** Für alle $x \in \mathbb{X}$ gilt $p(x) = 1$.

Ist dies erfüllt, so nennen wir $R$ kurz eine (*zweidimensionale*) *homogene faktorielle Algebra*. Über algebraisch abgeschlossenem Körper ist nur die durch Totalgrad graduierte Polynomalgebra homogen faktoriell (Satz 1.6.5).

Proposition 3.2.1. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*
(1) $R$ *ist homogen faktoriell.*
(2) *Für alle einfachen Garben* $\mathcal{S}$ *gilt* $\operatorname{Ext}^1(\mathcal{S},\mathcal{S}) \neq 0$*.*
(3) *Für je zwei nicht-isomorphe einfache Garben* $\mathcal{S}_1$ *und* $\mathcal{S}_2$ *gilt* $\operatorname{Ext}^1(\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2) = 0$*.*
(4) *Für jede einfache Garbe* $\mathcal{S}$ *gilt* $\operatorname{Hom}(\mathcal{O},\mathcal{S}) \neq 0$*.*
(5) *Für jede einfache Garbe* $\mathcal{S}$ *gilt* $\langle[\mathcal{S}],[\mathcal{S}]\rangle = 0$*.* □

Für den Rest dieses Abschnittes sei $R$ eine homogene faktorielle Algebra.

Lemma 3.2.2 (Multiplizitätenfreiheit). *Sei $\mathcal{S}$ eine einfache Garbe. Dann gilt*

$$\frac{\dim_k \operatorname{Hom}(\mathcal{O}, \mathcal{S})}{\dim_k \operatorname{End}(\mathcal{S})} = 1.$$

Beweis. Dies wird bewiesen wie in 1.6.1. □

Definition 3.2.3. $g(\mathbb{X}) = \dim_k \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{X}}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ heißt das *Geschlecht* von $\mathbb{X}$, oder auch von $R$. (In diesem homogenen Fall stimmt es mit der Definition in [**30**] überein.)

Sei $\mathcal{F} \in \operatorname{coh}^H(\mathbb{X})$. Definiere $\deg' \mathcal{F} = \langle \mathcal{O}, \mathcal{F} \rangle - (1 - g(\mathbb{X})) \cdot \operatorname{rk} \mathcal{F}$, und $\delta' : H \longrightarrow \mathbb{Z}$ durch $\delta'(h) = \deg' \mathcal{O}(h)$ $(h \in H)$.

Lemma 3.2.4. *Die Abbildung $\delta'$ ist ein Homomorphismus von Gruppen, und es gilt*

$$\delta' \left( \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \deg' \mathcal{S}_i$$

*für alle $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{Z}$.*

Beweis. Folgt wie in 1.6.2. □

Das Bild $\operatorname{Im} \delta'$ ist also eine Untergruppe von $\mathbb{Z}$. Damit existiert ein eindeutig bestimmtes $\varepsilon \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon > 0$, so daß $\operatorname{Im} \delta' = \varepsilon \mathbb{Z}$. Es gilt $\varepsilon = \min\{\langle \mathcal{O}, \mathcal{S} \rangle \mid \mathcal{S} \text{ einfach}\} = \min\{\dim_k \operatorname{End} \mathcal{S} \mid \mathcal{S} \text{ einfach}\}$. $\varepsilon$ teilt alle $\deg' \mathcal{S}$ ($\mathcal{S}$ einfach). Wir nennen $\varepsilon$ den *Typ* von $\mathbb{X}$ (vgl. Abschnitt 4.2).

Setze $\deg = \deg' / \varepsilon$ und $\delta = \delta' / \varepsilon : H \longrightarrow \mathbb{Z}$. Dann ist $\delta$ ein Epimorphismus. Sei $\mathcal{S}_0$ eine einfache Garbe mit $\deg \mathcal{S}_0 = 1$. Dann gilt $\operatorname{rk} \mathcal{F} = \frac{1}{\varepsilon} \langle \mathcal{F}, \mathcal{S}_0 \rangle$ für jedes $\mathcal{F} \in \operatorname{coh}^H(\mathbb{X})$.

Lemma 3.2.5.

$$\operatorname{Kern} \delta = H_T.$$

Beweis. Wie oben erhält man $\delta(\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \deg \mathcal{S}_i$. Sei $\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i \in H$ mit $\sum_{i=1}^n \alpha_i \deg \mathcal{S}_i = 0$. Da $H$ vom Rang 1 ist, gibt es ein Element $c \in H$ mit $c > 0$ und

$$\mathbb{Z} c = \bigcap_{i=1}^{n} \mathbb{Z} \vec{x}_i.$$

Sei $q := \delta(c)$ und $q_i \in \mathbb{N}$ mit $q_i \vec{x}_i = c$. Dann gilt $q_i \deg \mathcal{S}_i = q$. Es folgt $q \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \deg \mathcal{S}_i c = 0$. □

Proposition 3.2.6 (Riemann-Roch). *Für alle $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathrm{K}_0(\mathbb{X})$ ist*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = (1 - g(\mathbb{X})) \cdot \operatorname{rk} \mathbf{x} \cdot \operatorname{rk} \mathbf{y} + \varepsilon \cdot \begin{vmatrix} \operatorname{rk} \mathbf{x} & \operatorname{rk} \mathbf{y} \\ \deg \mathbf{x} & \deg \mathbf{y} \end{vmatrix}.$$

Beweis. Offensichtlich gilt die Aussage für $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$, die Klassen von Linienbündeln oder von einfachen Garben sind, und die Behauptung folgt. □

## 3.3. Das Geschlecht von $\mathbb{X}$

Sei $R$ in diesem Abschnitt eine homogene faktorielle Algebra. Wir ziehen einige Folgerungen aus der Riemann-Roch-Formel.

KOROLLAR 3.3.1. *Ist $g(\mathbb{X}) = 0$, so ist $\delta : H \longrightarrow \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus.*

BEWEIS. Seien $h$, $h' \in H$ mit $\delta(h) = \delta(h')$. Dann gilt wegen der Riemann-Roch-Formel

$$\dim_k R_{h'-h} - \dim_k R_{\omega+h-h'} = \langle \mathcal{O}(h), \mathcal{O}(h') \rangle = 1 + \varepsilon(\delta(h') - \delta(h)) = 1.$$

Nimmt man $h \neq h'$ an, so folgte $R_{h'-h} = 0$, und somit $1 = -\dim_k R_{\omega+h-h'} \leq 0$, Widerspruch. □

Ist $g(\mathbb{X}) = 0$, so identifizieren wir $H$ via $\delta$ mit $\mathbb{Z}$.

KOROLLAR 3.3.2. *Ist $g(\mathbb{X}) = 0$, so ist $\varepsilon = 1$ oder $\varepsilon = 2$, genauer $\omega = -\frac{2}{\varepsilon}$.*

BEWEIS. Nach der Riemann-Roch-Formel gilt

$$-1 = \dim_k R_\omega - 1 = \langle \mathcal{O}, \mathcal{O}(\omega) \rangle = 1 + \varepsilon \cdot \omega.$$

□

KOROLLAR 3.3.3. *Sei $g(\mathbb{X}) = 0$. Ist $\pi$ ein homogenes Primelement in $R$ vom Grad $d$, und ist $\mathcal{S}$ einfach und konzentriert in $x = R\pi$, so gilt $[\mathrm{End}(\mathcal{S}) : k] = \varepsilon d$.*

BEWEIS. Aus der Riemann-Roch-Formel folgt $\dim_k \mathrm{End}(\mathcal{S}) = \langle \mathcal{O}, \mathcal{S} \rangle = \varepsilon \cdot \deg \mathcal{S}$, und Betrachtung der kurzen exakten Folge

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{\cdot\pi} \mathcal{O}(\vec{\pi}) \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow 0$$

liefert $\deg \mathcal{S} = \delta(\vec{\pi}) = d$. □

BEISPIELE 3.3.4. (1) Sei $R = k[X, Y]$ graduiert durch Totalgrad. Sei $\pi$ ein homogenes Primelement in $R$ vom Grad $d$. Sei $f(T) \in k[T]$ das zu $\pi$ gehörige in $Y$ dehomogenisierte irreduzible Polynom vom Grad $d$ (o. E. gelte $\pi \not\sim Y$). Sei $\mathcal{S}$ die einfache Garbe in $\mathrm{coh}^{\mathbb{Z}}(\mathbb{X})$, die in $x = R\pi$ konzentriert ist. Dann ist $\mathrm{End}(\mathcal{S}) \simeq k(\alpha)$, wobei $f(T)$ das Minimalpolynom von $\alpha$ über $k$ ist.

(2) Sei $R = k[X, Y, Z]/Q$, wobei $Q$ eine anisotrope quadratische Form über $k$ ist. Sei $\pi$ ein homogenes Primelement in $R$ vom Grad $d$, o. E. $\pi \not\sim z$. Man kann annehmen, daß $Q$ von der Form $aX^2 + bY^2 + Z^2$ ist. Sei $f(X, Y)$ das zu $\pi$ gehörige in $Z$ dehomogenisierte irreduzible Polynom. Sei $\mathcal{S}$ die einfache Garbe in $\mathrm{coh}^{\mathbb{Z}}(\mathbb{X})$, die in $x = R\pi$ konzentriert ist. Dann ist $\mathrm{End}(\mathcal{S}) \simeq k[X, Y]/(aX^2 + bY^2 + 1, f(X, Y))$.

## 3.4. Der Beweis der Charakterisierung

Wir übernehmen die Voraussetzungen aus dem letzten Abschnitt. Im folgenden sei

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{O}(-\omega) \longrightarrow 0 \tag{3.4.1}$$

die Auslander-Reiten-Folge mit Anfangsterm $\mathcal{O}$. Den Mittelterm $\mathcal{A}$ nennen wir auch in dieser Situation das *Auslander-Bündel*.

PROPOSITION 3.4.1. *Wenn $\mathcal{A}$ in zwei Linienbündel zerfällt, so ist $H \simeq \mathbb{Z}$ und $R \simeq k[X,Y]$, graduiert durch Totalgrad.*

Beachte, daß wir hier $g(\mathbb{X}) = 0$ nicht benötigen.

BEWEIS. Wegen der Faktorialität gibt es $h$, $h' \in H$ mit $\mathcal{A} \simeq \mathcal{O}(h) \oplus \mathcal{O}(h')$. Dann $0 < h, h' < -\omega$. Insbesondere ist $\omega < 0$, also $g(\mathbb{X}) = 0$, und $H = \mathbb{Z}$. Wegen $\omega \leq -2$ haben wir $\varepsilon = 1$ und $\omega = -2$. Nach Riemann-Roch gilt für $n \geq 0$, daß $\dim_k R_n = n+1$. Sind etwa $\pi_1$ und $\pi_2$ linear unabhängig und vom Grad 1 in $R$, so sieht man leicht $R = k[\pi_1, \pi_2]$, und somit ist $R$ isomorph zur Polynomalgebra in zwei Unbestimmten. $\square$

LEMMA 3.4.2. *Ist $g(\mathbb{X}) = 0$, so gilt $R = k[R_1]$.*

BEWEIS. Wir können annehmen, daß $\mathcal{A}$ unzerlegbar ist. Dann ist $\varepsilon = 2$ (falls $\varepsilon = 1$, so folgt $R \simeq k[X,Y]$ wie in Proposition 3.4.1, also $\mathcal{A}$ zerlegbar) und $\omega = -1$. Dann folgt wie in Abschnitt 2.2, daß $\mathcal{O} \oplus \mathcal{A}$ ein Kippbündel ist, und daß $\mathcal{O}$ und $\mathcal{A}$ bis auf Verschiebung die einzigen Vektorbündel sind. Sei $r \neq 0$ ein homogenes Element vom Grad $n$ in $R$. Dann definiert $r$ einen Morphismus $f \in \mathrm{Hom}(\mathcal{O}, \mathcal{O}(n))$, $f \neq 0$. Es folgt dann, daß $f$ in eine Summe von Kompositionen von irreduziblen Morphismen in $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}(l), \mathcal{A}(l))$ und $\mathrm{Hom}(\mathcal{A}(l), \mathcal{O}(l+1))$ $(0 \leq l < n)$ zerfällt. Insbesondere zerfällt $f$ in eine Summe von Kompositionen von Morphismen in $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}, \mathcal{O}(1))$, was das Lemma beweist. $\square$

BEWEIS VON THEOREM 5. Sei $g := g(\mathbb{X})$.

(1)$\Longrightarrow$(4): Sei $\mathcal{A}$ unzerlegbar. Dann gilt $\varepsilon = 2$, und nach der Riemann-Roch-Formel ist $\dim_k R_n = 2n+1$ für $n \geq 0$. Sind $\pi_1$, $\pi_2$, $\pi_3 \in R_1$ linear unabhängig, so gilt nach Lemma 3.4.2 $R = k[\pi_1, \pi_2, \pi_3]$. Betrachte den kanonischen Epimorphismus $k[X,Y,Z] \longrightarrow R$. Da $R$ die graduierte Krulldimension 2 hat, wird der Kern von diesem Epimorphismus von einem irreduziblen homogenen Polynom $f$ erzeugt. Betrachte die exakte Folge

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow R_1 \otimes_k R_1 \xrightarrow{\varphi} R_2 \longrightarrow 0.$$

Im Kern $N$ hat man die Relationen $\pi_i \otimes \pi_j - \pi_j \otimes \pi_i$. Wegen $\dim_k R_2 = 5$ ist $\dim_k N = 4$. Daher gibt es eine weitere Relation. Damit hat $f$ den Grad 2, ist also quadratische Form. Nach einem Satz von Samuel ([**16**, 11.5], vgl. auch 2.3.2) ist diese anisotrop.

(2)$\Longrightarrow$(1): Sei $\mathcal{A}$ unzerlegbar. Falls es kein unzerlegbares Vektorbündel vom Rang 3 gibt, dann sind die unzerlegbaren Mittelterme in der Auslander-Reiten-Folge mit Anfangsterm $\mathcal{A}$ vom Rang $\leq \mathrm{rk}\,\mathcal{A}$, und daher folgt mit dem Argument aus [**33**, Prop. 4.4], daß $g = 0$ oder $g = 1$ ist. Da die Rangfunktion beschränkt auf den unzerlegbaren Vektorbündeln ist, zeigt dieses Argument induktiv, daß in jedem Fall $g = 0$ oder $g = 1$ gilt. Ist aber $g = 1$, dann wäre die Rangfunktion unbeschränkt auf den unzerlegbaren Vektorbündeln, wie Argumente aus [**3**] zeigen (vgl. auch [**2**, Prop. 4.1]):

Sei $\mathcal{F}_1 = \mathcal{O}$, $\mathcal{F}_2 = \mathcal{A}$. Es gilt $\dim_k \mathrm{Hom}(\mathcal{O}, \mathcal{O}) = 1 = \dim_k \mathrm{Hom}(\mathcal{O}, \mathcal{A})$ ([**3**, Lem. 14]). Sei $\mathcal{F}_{r-1}$ ein unzerlegbares Vektorbündel vom Rang $r-1$ mit $\det \mathcal{F}_{r-1} = 0$ und $\dim_k \mathrm{Hom}(\mathcal{O}, \mathcal{F}_{r-1}) = 1$. Sei

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{F}_r \longrightarrow \mathcal{F}_{r-1} \longrightarrow 0$$

exakt und nicht-aufspaltend. Anwendung von $\mathrm{Hom}(\mathcal{O},-)$ auf die duale Sequenz zeigt, daß der Verbindungs-Morphismus $\delta$ ein Monomorphismus ist, und dann folgt $\mathrm{Hom}(\mathcal{O},\mathcal{F}_r) \simeq \mathrm{Hom}(\mathcal{O},\mathcal{F}_{r-1})$ ([**3**, Lem. 14]). Außerdem ist $\mathcal{F}_r$ unzerlegbar ([**3**, Lem. 16]). Damit hat man unzerlegbare Vektorbündel beliebig hohen Ranges konstruiert.

(3)$\Longrightarrow$(4): Man kann annehmen, daß $\mathcal{A}$ unzerlegbar ist. Es gilt $\dim_k R_1 = 1-g+\varepsilon+\dim_k R_{\omega-1} \leq 1+\varepsilon$ und $\dim_k R_2 = 1-g+2\cdot\varepsilon+\dim_k R_{\omega-2} \leq 1+2\cdot\varepsilon$. Wegen $R \not\simeq k[X,Y]$ folgt $\varepsilon = 2$, insbesondere $\dim_k R_1 = 3$, $\dim_k R_2 \leq 5$. Dann folgt wie im Beweis von "(1)$\Longrightarrow$(4)", daß $R \simeq k[X,Y,Z]/Q$ mit einer anisotropen quadratischen Form $Q$ gilt.

(4)$\Longrightarrow$(2): Gilt (4), so ist die Rangfunktion auf den unzerlegbaren Vektorbündeln durch 2 beschränkt. □

Korollar 3.4.3. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*
(1) *Es ist* $g(\mathbb{X}) = 0$.
(2) *Es gibt ein Kippbündel über* $\mathbb{X}$.

Beweis. (1)$\Longrightarrow$(2): Folgt aus Theorem 5 zusammen mit Proposition 2.2.4.

(2)$\Longrightarrow$(1): Gibt es ein Kippbündel, so gibt es ein exzeptionelles Vektorbündel $E$. Aus der Riemann-Roch-Formel folgt

$$0 < \langle [E],[E]\rangle = (1-g(\mathbb{X}))\cdot \mathrm{rk}(E)^2,$$

also $g(\mathbb{X}) = 0$. □

Wenn das Auslander-Bündel $\mathcal{A}$ zerlegbar ist, so folgt $g(\mathbb{X}) = 0$ nach 3.4.1. Gilt dies auch, wenn $\mathcal{A}$ unzerlegbar ist? Eine positive Aussage können wir zumindest dann machen, wenn $\mathrm{End}(\mathcal{A})$ ein Schiefkörper ist.

Lemma 3.4.4. *Es gilt* $g(\mathbb{X}) = \dim_k \mathrm{Hom}(\mathcal{A},\mathcal{O}) = \dim_k \mathrm{rad}\,\mathrm{End}(\mathcal{A})$. *Ist* $g(\mathbb{X}) > 0$, *so gilt* $\mathrm{End}(\mathcal{A})/\,\mathrm{rad}\,\mathrm{End}(\mathcal{A}) = k$.

Beweis. Sei $g := g(\mathbb{X})$. Die Auslander-Reiten-Folge (3.4.1) induziert die exakten Folgen von Funktoren (wobei $(-,-) = \mathrm{Hom}(-,-)$)

$$0 \to (-,\mathcal{O}) \to (-,\mathcal{A}) \to (-,\mathcal{O}(-\omega)) \to (-,\mathcal{O}(-\omega))/\,\mathrm{rad}(-,\mathcal{O}(-\omega)) \to 0$$

und

$$0 \to (\mathcal{O}(-\omega),-) \to (\mathcal{A},-) \to (\mathcal{O},-) \to (\mathcal{O},-)/\,\mathrm{rad}(\mathcal{O},-) \to 0.$$

Ist $g = 0$, so ist offenbar auch $\mathrm{rad}\,\mathrm{End}(\mathcal{A}) = 0 = \mathrm{Hom}(\mathcal{A},\mathcal{O})$. Gelte $g > 0$. Setzt man in die zweite Folge $\mathcal{O}$ ein, so erhält man $g = \dim_k R_\omega = \dim_k \mathrm{Hom}(\mathcal{A},\mathcal{O})$. Setzt man in die zweite Folge $\mathcal{O}(-\omega)$ ein, so folgt $\dim_k \mathrm{Hom}(\mathcal{A},\mathcal{O}(-\omega)) = 1$. Setzt man $\mathcal{A}$ in die erste Folge ein, so erhält man die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{A},\mathcal{O}) \xrightarrow{f} \mathrm{Hom}(\mathcal{A},\mathcal{A}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{A},\mathcal{O}(-\omega)) \longrightarrow 0.$$

Offensichtlich landet hierbei der Monomorphismus $f$ in $\mathrm{rad}\,\mathrm{End}(\mathcal{A})$, und aus Dimensionsgründen ist $\mathrm{rad}\,\mathrm{End}(\mathcal{A})$ das Bild von $f$, und es folgt $\mathrm{End}(\mathcal{A})/\,\mathrm{rad}\,\mathrm{End}(\mathcal{A}) = k$. □

Korollar 3.4.5. *Ist* $\mathrm{End}(\mathcal{A})$ *ein Schiefkörper, so ist* $g(\mathbb{X}) = 0$. □

Mit Theorem 5 kann man einen weiteren Beweis von Satz 1.6.5 angeben. (Dies gilt auch für $\operatorname{char} k = 2$.) Ist $k$ algebraisch abgeschlossen, so gilt $\varepsilon = 1$. Nach Theorem 5 genügt es, $g(\mathbb{X}) = 0$ zu zeigen. Dies folgt zusammen mit Lemma 1.6.3 aus der folgenden Aussage.

LEMMA 3.4.6. *Es gelte* $\varepsilon = 1$ *und* $g(\mathbb{X}) > 0$. *Für alle* $x \in \mathbb{X}$ *mit* $\delta(\vec{x}) = 1$ *gilt dann* $\dim_k R_{\vec{x}} = 1$.

BEWEIS. Nach der Riemann-Roch-Formel gilt für jedes $l > 0$

$$\dim_k R_{l\vec{x}} - \dim_k R_{\omega - l\vec{x}} = \langle \mathcal{O}, \mathcal{O}(l\vec{x}) \rangle = (1 - g(\mathbb{X})) + l.$$

Da $H$ endlich erzeugt vom Rang 1 ist, gibt es ein $l > 0$, so daß $l\vec{x} > \omega$, insbesondere $R_{\omega - l\vec{x}} = 0$. Es folgt $\dim_k R_{l\vec{x}} \leq l$. Nimmt man $\dim_k R_{\vec{x}} \geq 2$ an, und sind $\pi_1$, $\pi_2 \in R_{\vec{x}}$ linear unabhängig, so folgt induktiv, daß die $l + 1$ Elemente

$$\pi_1^l, \pi_1^{l-1}\pi_2, \pi_1^{l-2}\pi_2^2, \ldots, \pi_1\pi_2^{l-1}, \pi_2^l$$

linear unabhängig in $R_{l\vec{x}}$ sind, was nicht sein kann. □

Es bleiben einige Fragen offen:

- Gilt stets $g(\mathbb{X}) = 0$? Etwas schwächer:
- Gilt stets, daß $\delta : H \longrightarrow \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus ist?
- Wenn $\delta : H \longrightarrow \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus ist, gilt dann $g(\mathbb{X}) = 0$?
- Nach 3.4.1 gilt: Ist $\varepsilon \geq 2$, so ist das Auslander-Bündel $\mathcal{A}$ unzerlegbar. Folgt umgekehrt aus der Unzerlegbarkeit von $\mathcal{A}$, daß der Typ $\varepsilon \geq 2$ ist?

Die Bejahung der letzten Frage würde zusammen mit Proposition 3.4.1 den Beweis vom algebraisch abgeschlossenen Fall (Satz 1.6.5) drastisch vereinfachen.

Die dritte Frage läßt sich über reell abgeschlossenem Grundkörper bejahen. Zu untersuchen ist nur der Fall, wenn $\mathcal{A}$ unzerlegbar ist:

PROPOSITION 3.4.7. *Sei* $k$ *ein reell abgeschlossener Körper. Sei* $R$ *eine* $H$*-graduierte homogene faktorielle* $k$*-Algebra. Nimmt man an, daß* $H$ *torsionsfrei und das Auslander-Bündel* $\mathcal{A}$ *unzerlegbar ist, so ist die* $\mathbb{Z}$*-graduierte Algebra* $R$ *isomorph zu*

$$k[X, Y, Z]/(X^2 + Y^2 + Z^2),$$

*wobei die Unbestimmten* $X$, $Y$, $Z$ *den Grad* 1 *haben.*

BEWEIS. Da $k$ reell abgeschlossen ist, folgt $\varepsilon \leq 2$. Nach Theorem 5 genügt daher zu zeigen, daß $R = k[R_1]$ gilt. Wir unterscheiden zwei Fälle:

(a) $\varepsilon = 1$. Dann folgt aus der Riemann-Roch-Formel $\dim_k R_1 \leq 2$ und $\dim_k R_2 \leq 3$. Aus $\dim_k R_1 = 1$ folgt $\dim_k R_2 = 2$, und dann folgt $R \simeq k[\pi_1, \pi_2]$, wobei $\pi_1$ den Grad 1 und $\pi_2$ den Grad 2 hat. Dann wäre aber $p(x_1) = 2$ (wie aus 1.7.1 (1) folgt), Widerspruch. Also ist $\dim_k R_1 = 2$ und $\dim_k R_2 = 3$. Wird $R_1$ von $\pi_1$, $\pi_2$ erzeugt, so wird $R_2$ von $\pi_1^2$, $\pi_1\pi_2$, $\pi_2^2$ erzeugt, und es folgt $R = k[R_1]$.

(b) $\varepsilon = 2$. Dann haben alle homogenen Primelemente den Grad 1, und daher $R = k[R_1]$. □

## 3.5. Einfügung und Reduktion von Gewichten

Das Reduktionslemma 1.7.1 hat uns schon gezeigt, wie man von einer graduiert faktoriellen Algebra zu einer graduiert faktoriellen Algebra kommt, die homogen ist. Wir beschreiben nun auch den umgekehrten Prozeß, das sogenannte *Einfügen von Gewichten*, welches eine Verallgemeinerung von Begriffen aus [**37, 43, 44**] darstellt (vgl. auch [**31**]). Das Einfügen von Gewichten in Primelementen gestattet, ausgehend von homogen faktoriellen Algebren, eine Vielzahl von graduiert faktoriellen Algebren zu konstruieren. Die praktische, explizite Durchführbarkeit hängt davon ab, ob man die Primelemente in der homogenen faktoriellen Algebra kennt. Dies war über algebraisch abgeschlossenem Grundkörper problemlos und stellt auch über reell abgeschlossenem Grundkörper kein Hindernis dar.

Während die Reduktion von Gewichten eng verwandt ist mit dem Perpendikular-Kalkül ([**19**] sowie [**32**, Prop. 4.2], aber auch innerhalb der Grothendieck-Gruppe, vgl. [**30**]), was in 3.5.5 gezeigt wird, steht das Einfügen von Gewichten dem Bilden von Einpunkt-(Co)-Erweiterungen (z. B. [**39**]) nahe.

Wir behalten die Voraussetzungen an $H$ und $R$ aus Abschnitt 3.1 bei. $R$ ist also nicht notwendig homogen. Sei $h \in H$ und $p \in \mathbb{N}$. Definiere $H[\frac{h}{p}] := (H \oplus \mathbb{Z})/\mathbb{Z}(-h,p)$. Schreibe $\frac{h}{p}$ für die Klasse von $(0,1)$. Offensichtlich gilt $p = \min\{l > 0 \mid l \cdot \frac{h}{p} \in H\}$.

Sei $r \in R$ ein homogenes Element vom Grad $h$. Sei $R[r^{1/p}]$ die $H[\frac{h}{p}]$-graduierte Algebra $R[T]/(T^p - r)$, wobei $\deg T = \frac{h}{p}$ (vgl. mit [**37**, § 4], [**43**] und [**44**, Satz 62.4]). Offensichtlich ist die Einschränkung $R[r^{1/p}]_{|H} = R$. Wir sagen, daß wir in $r$ das *Gewicht $p$ eingefügt* haben.

Einfügung von mehr als einem Gewicht wird in offensichtlicher Weise induktiv definiert. Im folgenden bezeichne $\mathrm{HP}^H(R)$ die Menge aller homogenen Primelemente bis auf Assoziiertheit.

Proposition 3.5.1 (Einfügungs-Lemma). *Sei $\pi \in R$ ein homogenes Primelement vom Grad $h$, welches einen gewöhnlichen Punkt in $\mathbb{X}$ induziert, und sei $p \geq 2$. Sei $\overline{\pi} \in R[\pi^{1/p}]$ mit $\overline{\pi}^p = \pi$. Dann erfüllt die $H[\frac{h}{p}]$-graduierte Algebra $R[\pi^{1/p}]$ wieder* **(F1)**–**(F3)**, *und es gilt*

$$\mathrm{HP}^{H[\frac{h}{p}]}(R[\pi^{1/p}]) = \mathrm{HP}^H(R) \setminus \{\pi\} \cup \{\overline{\pi}\}.$$

*Sei $\overline{\mathbb{X}} = \mathrm{Proj}^{H[\frac{h}{p}]}(R[\pi^{1/p}])$ mit Gewichtsfunktion $\overline{p}$, für $x \in \mathbb{X}$ sei $\bar{x}$ der assoziierte Punkt in $\overline{\mathbb{X}}$. Dann gilt*

$$\overline{p}(\bar{x}) = \begin{cases} p & x = R\pi, \\ p(x) & x \neq R\pi. \end{cases}$$

Beweis. Sei $\overline{h} = \frac{h}{p}$, $\overline{R} = R[\pi^{1/p}]$, $\overline{H} = H[\bar{h}]$. Mit einer leicht modifizierten Version von Eisensteins Kriterium folgt, daß $\overline{R}$ graduiert integer ist. Es ist

$$R/\pi R \simeq \overline{R}/\overline{\pi}\overline{R}$$

als $H$-graduierte Algebra und

$$\overline{\pi}\overline{R} \cap R = \pi R.$$

Daher gilt $\overline{\pi} \in \mathrm{HP}^{\overline{H}}(\overline{R})$. Offenbar $\pi \notin \mathrm{HP}^{\overline{H}}(\overline{R})$.

Sei $b \in \mathrm{HP}^{\overline{H}}(\overline{R})$. Dann $b \in \mathrm{HP}^H(R)$, falls $b \in R$, und $b \sim \overline{\pi}$, falls $b \notin R$. Sei umgekehrt $b \in \mathrm{HP}^H(R)$, $b \not\sim \pi$, $\overline{\pi}$. Falls $b$ das Produkt $c \cdot d$ teilt ($c$, $d \in \overline{R}$), erhält man nach sukzessivem Kürzen des Primelements $\overline{\pi}$, daß $b$ das Produkt $c' \cdot d'$ teilt, wobei $c'$, $d' \in R$, $c'$ teilt $c$ und $d'$ teilt $d$. Es folgt $b \in \mathrm{HP}^{\overline{H}}(\overline{R})$.

Sei nun $r \in \overline{R}$, $r \neq 0$ homogen. Ist $r \in R$, so hat es eine Zerlegung in ein Produkt von Primelementen. Ist $r \notin R$, so ist $r \in \overline{\pi}\overline{R}$. Dann $r = s \cdot \overline{\pi}^l$ für ein homogenes $s \in R$ und ein $l > 0$. Damit ist $\overline{R}$ graduiert faktoriell.

Die restlichen der Eigenschaften **(F1)**–**(F3)** sind auch leicht nachzuweisen.

Sei $x = R\pi$ und $\mathcal{S}$ einfach konzentriert in $\bar{x}$. Sei $h \in \overline{H}$ mit $\mathcal{S} \simeq \mathcal{S}(h)$. Dann gilt $\overline{R}_{\bar{x}} \simeq \overline{R}_{\bar{x}}(h)$, also gibt es eine homogene Einheit in $\overline{R}_{\bar{x}}$ vom Grad $h$, und es folgt dann, daß $h \in H$ ist. Da aber $\bar{h}, \ldots, (p-1)\bar{h} \notin H$ und $p\bar{h} \in H$, folgt $\overline{p}(\bar{x}) = p$.

Sei nun $y \in \mathbb{X}$ mit $y \neq R\pi$, sei $\mathcal{S}$ einfach konzentriert in $\bar{y}$. Dann gilt $\mathcal{S} \simeq \mathcal{S}(\bar{h})$. Sei $h \in H$. Es gilt $\mathcal{S} \simeq \mathcal{S}(h)$, genau wenn $\overline{R}_{\bar{y}} \simeq \overline{R}_{\bar{y}}(h)$, und dies gilt, genau wenn $R_y \simeq R_y(h)$, und es folgt $\overline{p}(\bar{y}) = p(y)$. □

KOROLLAR 3.5.2. *Die $H$-graduierte $k$-Algebra $R$ sei homogen faktoriell. Sei $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ eine Gewichtssequenz. Dann erfüllt die $H[\frac{\vec{\mathbf{x}}}{\mathbf{p}}] := H[\frac{\vec{x}_1}{p_1}, \ldots, \frac{\vec{x}_n}{p_n}]$-graduierte Algebra $R[\boldsymbol{\pi}^{1/\mathbf{p}}] := R[\pi_1^{1/p_1}, \ldots, \pi_n^{1/p_n}]$ die Bedingungen* **(F1)**–**(F3)**. *Die hinzugefügten Punkte sind gerade die Ausnahmepunkte und haben die Gewichte $p_1, \ldots, p_n$.* □

Ist $x \in \mathbb{X}$ ein exzeptioneller Punkt, so ist $x = R\pi_i$ für ein $i \in \{1, \ldots, n\}$. Sei o. E. $i = 1$. Dann ist $p(x) = p_1$. Dann heißt $R' = k[\pi_1^{p_1}, \pi_2, \ldots, \pi_n]$ die in $x$ *reduzierte* Algebra. $R'$ ist offensichtlich unabhängig von der Wahl der Erzeuger $\pi_i$ von $R$. Sei $H'$ die von $\vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ erzeugte Untergruppe von $H$. Im Reduktionslemma 1.7.1 wurde gezeigt, daß die $H'$-graduierte Algebra $R'$ wieder **(F1)**–**(F3)** erfüllt und daß sich das Gewicht von $x$ auf 1 reduziert hat.

DEFINITION 3.5.3. Es sei $\mathrm{Hz}(R) = k[\pi_1^{p_1}, \ldots, \pi_n^{p_n}]$ die Unteralgebra, die durch $\mathrm{Hz}(H) = \langle p_1\vec{x}_1, \ldots, p_n\vec{x}_n \rangle$ graduiert wird. Dann heißt $\mathrm{Hz}(R)$ das *Herz* oder *Herzstück* von $R$. Es ist unabhängig von der Auswahl der Erzeuger $\pi_i$, und es ist eine homogene faktorielle Algebra.

Einfügen und Reduzieren sind zueinander inverse Prozesse, wie der folgende Satz zeigt, der natürlich auch für Einfügung und Reduktion von nur einem Gewicht gilt:

PROPOSITION 3.5.4. (1) *Es ist $H \simeq \mathrm{Hz}(H)[\frac{p_1\vec{x}_1}{p_1}, \ldots, \frac{p_n\vec{x}_n}{p_n}]$, und als graduierte Algebren sind $R$ und $\mathrm{Hz}(R)[(\pi_1^{p_1})^{1/p_1}, \ldots, (\pi_n^{p_n})^{1/p_n}]$ isomorph.*

(2) *Sei $R$ homogen faktoriell. Seien $p_1, \ldots, p_n \geq 1$ Gewichte. Dann ist $\mathrm{Hz}(H[\frac{\vec{x}_1}{p_1}, \ldots, \frac{\vec{x}_s}{p_s}]) \simeq H$ und als graduierte Algebren $\mathrm{Hz}(R[\pi_1^{1/p_1}, \ldots, \pi_n^{1/p_n}]) \simeq R$.*

BEWEIS. Einfügung von Gewichten werde mit $\overline{\cdot}$ abgekürzt.

(1) Zu zeigen ist $H \simeq \overline{\mathrm{Hz}(H)}$ und $R \simeq \overline{\mathrm{Hz}(R)}$. Man hat Epimorphismen $\varphi : \overline{\mathrm{Hz}(H)} \longrightarrow H$ ($h \in \mathrm{Hz}(H), h \mapsto h$, $\overline{p_i\vec{x}_i} \mapsto \vec{x}_i$), und $\overline{\mathrm{Hz}(R)} \longrightarrow R$ analog definiert. Sei $h \in \overline{\mathrm{Hz}(H)}$ mit $\varphi(h) = 0$. Nach Definition von $\overline{\mathrm{Hz}(R)}$ folgt dann, daß $0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i\vec{x}_i + h'$ gilt mit $0 \leq \alpha_i \leq p_i - 1$ und $h' \in \mathrm{Hz}(H)$. Seien $\mathcal{S}_i$ einfache Garben, die zu den $\pi_i$ assoziiert sind. Es folgt $\mathcal{S}_i \simeq \mathcal{S}_i(0) \simeq \mathcal{S}_i(\alpha_i\vec{x}_i)$, also $\alpha_i = 0$, und es folgt auch $h' = 0$ und somit $h = 0$. Der Epimorphismus zwischen den Algebren ist dann ein

$H$-graduierter Epimorphismus, und die Isomorphie der graduierten Algebren folgt, da beide die gleiche Krulldimension haben.

(2) Zu zeigen ist $\mathrm{Hz}(\overline{H}) \simeq H$ und $\mathrm{Hz}(\overline{R}) \simeq R$. Es ist $\mathrm{Hz}(\overline{H}) = \mathrm{Hz}(\langle \frac{\vec{x}_1}{p_1}, \dots, \frac{\vec{x}_n}{p_n} \rangle) = \langle p_1 \frac{\vec{x}_1}{p_1}, \dots, p_n \frac{\vec{x}_n}{p_n} \rangle = \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \rangle = H$, und ebenso folgt die Behauptung für die Algebren. □

Proposition 3.5.5. *Sei $x \in \mathbb{X}$ ein exzeptioneller Punkt vom Gewicht $p > 1$, sei $\mathcal{S}$ eine zugehörige einfache Garbe, so daß $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{S}, \mathcal{O}) \neq 0$. Sei $R'$ die $H'$-graduierte, in $x$ reduzierte Algebra, sei $\mathbb{X}' = \mathrm{Proj}^{H'}(R')$. Dann ist $\mathrm{coh}^{H'}(\mathbb{X}')$ äquivalent zur rechtsperpendikularen Kategorie von $\tau\mathcal{S}, \dots, \tau^{p-1}\mathcal{S}$, also insbesondere eine volle, exakte und erweiterungs-abgeschlossene Unterkategorie von $\mathrm{coh}^H(\mathbb{X})$.*

Beweis. Man hat eine kanonische Inklusion $\varphi : [H'; R'] \longrightarrow [H; R]$ der Begleitkategorien (vgl. [**19**]). Dies induziert durch Einschränkung einen exakten Funktor

$$\varphi_* : \mathrm{Mod}^H(R) \longrightarrow \mathrm{Mod}^{H'}(R'),$$

und auch einen exakten Funktor

$$\varphi_* : \mathrm{Qcoh}^H(\mathbb{X}) \longrightarrow \mathrm{Qcoh}^{H'}(\mathbb{X}').$$

Definiere eine Abbildung $\varphi' : H \longrightarrow H'$ durch $\varphi'(m\vec{x} + h') = h'$, falls $0 \leq m < p$, $h' \in H'$. Es gilt $\varphi'(h') = h'$ für $h' \in H'$, und für jedes $h \in H$ ist $\varphi_*(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}(h)) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{X}'}(-\varphi'(-h))$. Nun folgt die Behauptung wie in [**19**, Thm. 9.5]:

Sei $\mathcal{S}$ eine einfache Garbe, konzentriert in $y \neq x$. Dann hat man die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{X}} \xrightarrow{\cdot\pi} \mathcal{O}_{\mathbb{X}}(\vec{y}) \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow 0,$$

wobei $\pi \in R'$ prim sowohl in $R'$ als auch in $R$ ist und $\vec{y} \in H'$. Anwendung von $\varphi_*$ ergibt

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{X}'} \xrightarrow{\cdot\pi} \mathcal{O}_{\mathbb{X}'}(\vec{y}) \longrightarrow \varphi_*\mathcal{S} \longrightarrow 0.$$

$\varphi_*\mathcal{S}$ ist also eine einfache Garbe, die das gleiche Gewicht hat wie $\mathcal{S}$.

Sei nun $\mathcal{S}$ eine einfache Garbe, die in $x$ konzentriert ist, und sei $x = R\pi$; nach evtl. Verschiebung hat man die exakte Folge

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{X}} \xrightarrow{\cdot\pi} \mathcal{O}_{\mathbb{X}}(\vec{x}) \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow 0.$$

Anwendung von $\varphi_*$ liefert

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{X}'} \xrightarrow{\cdot\pi'} \mathcal{O}_{\mathbb{X}'}(-\varphi'(-\vec{x})) \longrightarrow \varphi_*\mathcal{S} \longrightarrow 0,$$

$-\varphi'(-\vec{x}) = p\vec{x}$, $\pi' = \pi^p$, also ist $\varphi_*\mathcal{S} \neq 0$ eine einfache Garbe über $\mathbb{X}'$. Sei $1 \leq j \leq p-1$. Anwendung von $\varphi_*$ auf

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{X}}(j\vec{x}) \xrightarrow{\cdot\pi} \mathcal{O}_{\mathbb{X}}((j+1)\vec{x}) \longrightarrow \tau^j\mathcal{S} \longrightarrow 0$$

liefert

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{X}'} \xrightarrow{\cdot\pi'} \mathcal{O}_{\mathbb{X}'} \longrightarrow \varphi_*\tau^j\mathcal{S} \longrightarrow 0,$$

und Multiplikation mit $\pi'$ ist ein Isomorphismus. Also $\varphi_*\tau^j\mathcal{S} = 0$. □

KOROLLAR 3.5.6. *Sei $S$ das Herz von $R$ und $H'$ das Herz von $H$. Sei $\mathbb{X} = \operatorname{Proj}^H(R)$ und $\mathbb{Y} = \operatorname{Proj}^{H'}(S)$. Seien $\mathcal{S}_i$ die exzeptionell einfachen Garben über $\mathbb{X}$, so daß $\operatorname{Ext}^1(\mathcal{S}_i, \mathcal{O}) \neq 0$ gilt. Sei $X = \{\mathcal{S}_i(j\vec{x}_i) \mid 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq p_i - 1\}$. Dann ist $\operatorname{coh}^{H'}(\mathbb{Y})$ äquivalent zur rechts-perpendikularen Kategorie $X^\perp = \{\mathcal{F} \in \operatorname{coh}^H(\mathbb{X}) \mid \operatorname{Hom}(\mathcal{G}, \mathcal{F}) = 0 = \operatorname{Ext}^1(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ für alle $\mathcal{G} \in X\}$ von $X$.* □

DEFINITION 3.5.7. Wir nennen $g_0(\mathbb{X}) := \dim_k \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{X}}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ das *homologische Geschlecht* von $\mathbb{X}$ bzw. $R$.

Im homogenen Fall stimmt es mit dem in 3.2.3 definierten Geschlecht überein, was im beliebigen Gewichtsfall nicht mehr zutrifft. Wir wählen die Bezeichnungen *homologisch* und $g_0$, um es vom virtuellen Geschlecht ([**34**], [**30**]) zu unterscheiden.

Aus Korollar 3.5.6 folgt

KOROLLAR 3.5.8. *Sei $S$ das Herz von $R$, sei $H'$ das Herz von $H$. Sei $\mathbb{X} = \operatorname{Proj}^H(R)$ und $\mathbb{Y} = \operatorname{Proj}^{H'}(S)$. Dann gilt*

$$g_0(\mathbb{X}) = 0 \iff g(\mathbb{Y}) = 0.$$

Damit ergibt sich sofort

KOROLLAR 3.5.9. *Es gelte $g_0(\mathbb{X}) = 0$. Dann ist das Herz $S$ von $R$ als graduierte Algebra isomorph zu $k[X, Y]$ oder zu $k[X, Y, Z]/Q(X, Y, Z)$, wobei $Q$ eine anisotrope quadratische Form über $k$ ist (beide Algebren graduiert durch Totalgrad).* □

KOROLLAR 3.5.10. *Es gelte $g_0(\mathbb{X}) = 0$. Dann geht $R$ durch Einfügung von Gewichten aus $k[X, Y]$ oder $k[X, Y, Z]/Q(X, Y, Z)$ hervor, wobei $Q$ eine anisotrope quadratische Form über $k$ ist.* □

Sei $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_n)$ und $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ ($d_i,\ p_i \in \mathbb{N},\ p_i \geq 2$). Sei $\mathbb{L}(\mathbf{p}, \mathbf{d})$ die endlich erzeugte abelsche Gruppe mit Erzeugern $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ und Relationen

$$p_i \vec{x}_i = d_i \vec{x}_0, \quad i = 1, \ldots, n$$

(vgl. [**30**]). Offenbar gilt

$$\mathbb{L}(\mathbf{p}, \mathbf{d}) \simeq \mathbb{Z}[\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{p}}].$$

Speziell gilt $\mathbb{L}(\mathbf{p}) = \mathbb{L}(\mathbf{p}, \mathbf{1})$.

SATZ 3.5.11. *Die kommutative $k$-Algebra $R$ erfülle* **(F1)**–**(F3)** *und habe homologisches Geschlecht null. Seien $p_1, \ldots, p_n \geq 2$ die Gewichte der Ausnahmepunkte der zugehörigen Kurve $\mathbb{X}$. Dann ist $R$ als graduierte Algebra isomorph zu einer $\mathbb{L}(\mathbf{p}, \mathbf{d})$-graduierten Algebra der Form*

- *$k[Y_1, Y_2, X_1, \ldots, X_n]/(X_1^{p_1} - \pi_1, \ldots, X_n^{p_n} - \pi_n)$, wobei $\pi_1, \ldots, \pi_n$ paarweise nicht-assoziierte homogene Primelemente in $k[Y_1, Y_2]$ sind, oder*
- *$k[Y_1, Y_2, Y_3, X_1, \ldots, X_n]/(Q(Y_1, Y_2, Y_3), X_1^{p_1} - \pi_1, \ldots, X_n^{p_n} - \pi_n)$, wobei $Q$ eine anisotrope ternäre quadratische Form über $k$ ist, und die Restklassen der Polynome $\pi_1, \ldots, \pi_n \in k[Y_1, Y_2, Y_3]$ paarweise nicht-assoziierte homogene Primelemente in $k[Y_1, Y_2, Y_3]/Q(Y_1, Y_2, Y_3)$ sind.*

*Hierbei ist $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_n)$ die Folge der Grade der Primelemente $\pi_i$, und die $\mathbb{L}(\mathbf{p}, \mathbf{d})$-Graduierung ist durch $\operatorname{grad} X_i = \vec{x}_i$ und $\operatorname{grad} Y_i = \vec{x}_0$ gegeben.* □

## 3.6. Reell abgeschlossener Grundkörper

Wir sind nun in der Lage, über reell abgeschlossenem Körper $k$ alle graduiert faktoriellen Algebren, die durch Gewichtseinfügung aus $k[X,Y]$ und $k[X,Y,Z]/(X^2+Y^2+Z^2)$ hervorgehen, explizit anzugeben, da die homogenen Primelemente in diesen Algebren bekannt sind.

Satz 3.6.1. *Sei $k$ ein reell abgeschlossener Körper. Sei $R$ eine kommutative $H$-graduierte $k$-Algebra, die* **(F1)**–**(F3)** *erfüllt und das homologische Geschlecht null hat. Dann gilt entweder*

(1) *$R \simeq k[X_1,\dots,X_n]/(h_3,\dots,h_n)$ mit $n \geq 2$, und falls $n \geq 3$, dann gilt für $i = 3,\dots,t$*

$$h_i = X_i^{p_i} - X_1^{p_1} + \lambda_i X_2^{p_2} \quad (\lambda_i \in k^* \textit{ paarweise verschieden}),$$

*und für $i = t+1,\dots,n$*

$$h_i = X_i^{p_i} - (X_1^{p_1} - \lambda_i X_2^{p_2}) \cdot (X_1^{p_1} - \overline{\lambda_i} X_2^{p_2}) \quad (\lambda_i \in \overline{k} \setminus k \textit{ pw. nicht-konjugiert});$$

*in diesem Fall gilt $H \simeq \mathbb{L}(\mathbf{p},\mathbf{d})$, wobei $d_i = 1$ für $i = 1,\dots,t$ und $d_i = 2$ für $i = t+1,\dots,n$; oder*

(2) *$H \simeq \mathbb{L}(\mathbf{p})$ und $R \simeq k[X_1,\dots,X_n]/(X_1^{2p_1} + X_2^{2p_2} + X_3^{2p_3}, g_4,\dots,g_n)$ mit $n \geq 3$, und falls $n \geq 4$, so ist für $i = 4,\dots,n$*

$$g_i = X_i^{p_i} - \alpha_i X_1^{p_1} - \beta_i X_2^{p_2} - \gamma_i X_3^{p_3}$$

*mit einer Folge von paarweise nicht-proportionalen Tripeln $(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)$, die außerdem nicht auf den Achsen $k(1,0,0)$, $k(0,1,0)$ und $k(0,0,1)$ liegen.*

Beweis. Den ersten Fall erhält man, wenn das Herz von $R$ isomorph ist zu $k[X,Y]$, den zweiten, wenn das Herz von $R$ isomorph ist zu $k[X,Y,Z]/(X^2+Y^2+Z^2)$. □

## 3.7. $\mathrm{K}_0(\mathbb{X})$ über graduiert faktoriellen Algebren

Wir zeigen, daß die Grothendieck-Gruppe $\mathrm{K}_0(\mathbb{X})$ von $\mathrm{coh}^H(\mathbb{X})$ zusammen mit der Eulerform und der Auslander-Reiten-Translation ein kanonisches Gitter ([**30**], vgl. Anhang A) definiert.

Lemma 3.7.1. *Sei $S$ eine $\mathbb{Z}$-graduierte $k$-Algebra, die homogen faktoriell ist. Sei $\mathbb{Y}$ das $\mathbb{Z}$-graduierte projektive Spektrum von $S$. Sei $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1,\dots,\pi_t)$ eine Folge von nicht-assoziierten homogenen Primelementen in $S$, deren Grade gegeben sind durch $\mathbf{d} = (d_1,\dots,d_t)$. Sei $\mathbf{p} = (p_1,\dots,p_t)$ eine Gewichtsfolge. Ist $\mathbb{X} = \mathbb{Y}(\mathbf{p},\boldsymbol{\pi})$ das graduierte projektive Spektrum von $R = S[\boldsymbol{\pi}^{1/\mathbf{p}}]$, so ist $\operatorname{Pic}\mathbb{X} \simeq \mathbb{L}(\mathbf{p},\mathbf{d})$.*

Beweis. Die Picard-Gruppe von $\mathbb{X}$ ist isomorph zur Graduierungsgruppe von $R$, die wiederum zu $\mathbb{Z}[\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{p}}] \simeq \mathbb{L}(\mathbf{p},\mathbf{d})$ isomorph ist. □

Seien die Voraussetzungen wie im Lemma (o. E. sei $S$ *positiv* graduiert), $R = S[\boldsymbol{\pi}^{1/\mathbf{p}}]$, $H = \mathbb{L}(\mathbf{p},\mathbf{d})$. Sei $\vec{x}_0 = 1 \in \mathbb{Z} \subset H$. Sei $r \in R_{\vec{x}_0}$ $(\subset S)$. Nehme an, daß $r$ homogen prim in $S$ (nicht notwendig prim in $R$!) ist. Dann heißt der Cokern $\mathcal{W} \in \mathrm{coh}^H(\mathbb{X})$ der durch $r$ induzierten Multiplikation,

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{X}} \xrightarrow{\cdot r} \mathcal{O}_{\mathbb{X}}(\vec{x}_0) \longrightarrow \mathcal{W} \longrightarrow 0, \tag{3.7.1}$$

eine *rationale* Garbe. Es gilt offenbar $\tau[\mathcal{W}] = [\mathcal{W}]$ (vgl. 1.4.2). Ist z. B. $d_1 = 1$ und $r = \pi_1$, so ist $[\mathcal{W}] = [\mathcal{S}_1] + [\mathcal{S}_1(\vec{x}_1)] + \cdots + [\mathcal{S}_1((p_1 - 1)\vec{x}_1)]$. Beachte, daß es rationale Garben immer gibt und daß alle dieselbe Klasse in der Grothendieck-Gruppe haben. Jedoch:

Bemerkung. Sei $k$ ein endlicher Körper. Dann gibt es in der durch Totalgrad graduierten Algebra $S := k[X, Y]$ bis auf Assoziiertheit nur endlich viele homogene Primelemente vom Grad 1, etwa $\pi_1, \ldots, \pi_t$. Sind $p_1, \ldots, p_t$ Gewichte $\geq 2$, so enthält $S$ aufgefaßt als Unteralgebra von $R := S[\boldsymbol{\pi}^{1/\mathbf{p}}]$ keine Primelemente vom Grad $1 \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{p}}]$. Es gibt hier also keine *einfache* Garbe, die rational ist. Ist $k$ unendlich, so gibt es eine solche aber immer.

Lemma 3.7.2. *Seien die Voraussetzungen wie in Lemma 3.7.1. Sei* $\mathbf{w}$ *die Klasse einer rationalen Garbe* $\mathcal{W}$. *Dann gilt* $\mathbb{Z}\mathbf{w} = \operatorname{Rad}\mathrm{K}_0(\mathbb{X}) \cap \mathrm{K}_0(\mathbb{X})_0$ (*wobei* $\mathrm{K}_0(\mathbb{X})_0$ *die Untergruppe bezeichnet, die von den Klassen einfacher Garben erzeugt wird*).

Beweis. Seien $\mathbf{s_1}, \ldots, \mathbf{s_t}$ Klassen einfacher exzeptioneller Garben in den verschiedenen Ausnahmepunkten $x_1, \ldots, x_t$ mit den Gewichten $p_1, \ldots, p_t$. Sei $\mathbf{x} \in \operatorname{Rad}\mathrm{K}_0(\mathbb{X}) \cap \mathrm{K}_0(\mathbb{X})_0$. $\mathbf{x}$ ist eine Linearkombination von Klassen einfacher Garben, exzeptioneller und gewöhnlicher. Dann ist jeder Teil dieser Linearkombination, der in einer Röhre $T_i$ zum $\tau$-Orbit von $\mathbf{s_i}$ liegt, ein Radikalelement und deshalb ein Vielfaches von $\sum_{j=0}^{p_i-1} \tau^j \mathbf{s_i}$ (wegen der Orthogonalität der Röhren).

Es gilt (o. E.) $\tau^j \mathbf{s_i} = [\mathcal{O}((j+1)\vec{x}_i)] - [\mathcal{O}(j\vec{x}_i)]$, nach 3.7.1 gilt also $\sum_{j=0}^{p_i-1} \tau^j \mathbf{s_i} = [\mathcal{O}(p_i\vec{x}_i)] - [\mathcal{O}] = [\mathcal{O}(d_i\vec{x}_0)] - [\mathcal{O}] = d_i([\mathcal{O}(\vec{x}_0)] - [\mathcal{O}]) = d_i\mathbf{w}$.

Sei nun $\mathcal{S}$ eine gewöhnliche einfache Garbe, konzentriert in $x \in \mathbb{X}$. Dann rührt $x$ von einem Punkt $y \in \mathbb{Y}$ her. Also ist $\vec{x} \in \mathbb{Z}\vec{x}_0$, etwa $\vec{x} = q\vec{x}_0$. Sei

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{X}} \xrightarrow{\cdot\pi} \mathcal{O}_{\mathbb{X}}(\vec{x}) \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow 0$$

exakt. Dann $[\mathcal{S}] = [\mathcal{O}(\vec{x})] - [\mathcal{O}] = q([\mathcal{O}(\vec{x}_0)] - [\mathcal{O}]) = q\mathbf{w}$. Es folgt die Behauptung. □

Satz 3.7.3. *Sei*

$$S = \begin{cases} k[X, Y], & \textit{oder} \\ k[X, Y, Z]/Q(X, Y, Z), & Q \textit{ anisotrop.} \end{cases}$$

*Sei im ersten Fall* $\varepsilon = 1$, *im zweiten* $\varepsilon = 2$. *Sei* $\mathbb{Y}$ *das* $\mathbb{Z}$*-graduierte projektive Spektrum von* $S$.

(1) $\mathrm{K}_0(\mathbb{Y})$ *ist das bilineare Gitter* $V_2(\varepsilon)$ (*vgl.* [**30**]).

(2) *Sei* $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \ldots, \pi_t)$ *eine Folge von nicht-assoziierten homogenen Primelementen in* $S$, *deren Grade gegeben sind durch* $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_t)$. *Sei* $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_t)$ *eine Gewichtsfolge. Sei* $\mathbb{X} = \mathbb{Y}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\pi})$ *das graduierte projektive Spektrum von* $R = S[\boldsymbol{\pi}^{1/\mathbf{p}}]$. *Sei* $\mathbf{w}$ *die Klasse einer rationalen Garbe über* $\mathbb{X}$. *Dann gilt:*

(a) *Für jede kohärente Garbe* $\mathcal{F}$ *über* $\mathbb{X}$ *ist* $\operatorname{rk}\mathcal{F} = \frac{1}{\varepsilon}\langle[\mathcal{F}], \mathbf{w}\rangle$.

(b) *Zusammen mit* $\mathbf{w}$ *ist die Grothendieck-Gruppe* $\mathrm{K}_0(\mathbb{X})$ *das kanonische Gitter mit Symbol*

$$\sigma[\mathbb{X}] = \left( \begin{array}{c|c} p_1, \ldots, p_t & \\ d_1, \ldots, d_t & \varepsilon \\ d_1, \ldots, d_t & \end{array} \right).$$

Beweis. (1) Sei $\mathbf{a}' = [\mathcal{O}_{\mathbb{Y}}]$, $\mathbf{w}' = [\mathcal{S}_0]$, wobei $S_0$ eine gewöhnliche einfache Garbe ist mit $\deg \mathcal{S}_0 = 1$. Dann ist $\mathrm{K}_0(\mathbb{Y}) = \mathbb{Z}\mathbf{a}' \oplus \mathbb{Z}\mathbf{w}'$, und es ist $\langle \mathbf{a}', \mathbf{w}' \rangle = \varepsilon \deg \mathcal{S}_0 = \varepsilon$, also ist $\mathrm{K}_0(\mathbb{Y}) = V_2(\varepsilon)$.

(2) (a) Es ist

$$\varepsilon = \min\{\dim_k \mathrm{Hom}_{\mathbb{Y}}(\mathcal{O}_{\mathbb{Y}}, \mathcal{S}) \mid \mathcal{S} \text{ einfach}\} = \dim_k \mathrm{Hom}_{\mathbb{X}}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}, \mathcal{W}) = \langle [\mathcal{O}], \mathbf{w} \rangle,$$

vgl. 3.3.3.

(b) Für $i = 1, \dots, t$ sei $\mathcal{S}_i$ exzeptionell einfach, konzentriert in $x_i$, wobei $x_i = R\pi_i^{1/p_i} \in \mathbb{X}$. Ohne Einschränkung sei $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}, \mathcal{S}_i) \neq 0$ $(i = 1, \dots, t)$. Sei $\mathbf{a} = [\mathcal{O}_{\mathbb{X}}]$, sei $\mathbf{s_i} = [\mathcal{S}_i]$ $(i = 1, \dots, t)$. Dann gilt (vgl. 3.5.8)

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = 1, \ \langle \mathbf{a}, \mathbf{w} \rangle = \varepsilon, \ \langle \mathbf{a}, \mathbf{s_i} \rangle = \varepsilon d_i = \langle \mathbf{s_i}, \mathbf{s_i} \rangle.$$

Es ist

$$B: \qquad \mathbf{a}, \ \tau^j \mathbf{s_i} \ (1 \leq i \leq t, \ 0 \leq j \leq p_i - 2), \ \mathbf{w}$$

ein Erzeugendensystem von $\mathrm{K}_0(\mathbb{X})$: Nach dem Vorherigen werden die Klassen von Garben endlicher Länge erzeugt, und daher auch die Klassen aller Linienbündel. Der Satz folgt nun aus A.2.1 (vgl. auch Lemma A.2.11). □

Sei $\mathcal{W}$ eine rationale Garbe. Dann gibt es einen Punkt $x \in \mathbb{X}$ mit $\mathrm{Supp}(\mathcal{W}) = \{x\}$, und $x$ ist ein rationaler Punkt (im Sinne von [**32**], vgl. auch 4.2.2): Denn ist $r$ wie in der kurzen exakten Folge (3.7.1), so kann man zwei Fälle unterscheiden:

1.) $r$ ist prim in $R$; dann ist $\mathcal{W}$ einfach.

2.) $r$ ist nicht prim in $R$. Dann ist $r = \pi^p$ mit $p > 1$ und $\pi$ homogen prim in $R$, und die Behauptung folgt aus 1.4.2.

Mit 3.5.5 folgt, daß $\mathcal{W}$ einen (kommutativen) Körper als Endomorphismenring hat. Denn ist $\mathcal{S}$ die einfache Garbe über $\mathbb{Y}$, die in $Sr$ konzentriert ist, so ist $\mathrm{End}_{\mathbb{X}}(\mathcal{W}) \simeq \mathrm{End}_{\mathbb{Y}}(\mathcal{S})$.

## 3.8. Ein Kippbündel

Wir konstruieren hier wie in [**32**] ein Kippbündel in $\mathrm{coh}(\mathbb{X})$, dessen Endomorphismenring eine kanonische $k$-Algebra im Sinne von [**40**] ist.

Sei $\mathbb{X}$ das graduierte projektive Spektrum von $R$. Seien die Voraussetzungen wie in 3.7.3. Es ist also $S$ das Herzstück von $R$, und es gilt $g_0(\mathbb{X}) = 0$. Wie bisher seien $\mathcal{S}_i$ einfache Garben, die in $x_i$ konzentriert sind. Wir nehmen ohne Einschränkung an, daß $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{S}_i, \mathcal{O}) \neq 0$ gilt $(i = 1, \dots, t)$. Sei $\mathcal{W}$ eine rationale Garbe. Sei $\mathcal{S}_i(j)$ eine unzerlegbare Garbe mit Träger $\{x_i\}$, Länge $j$ und Sockel $\mathcal{S}_i$. Definiere Vektorbündel $\mathcal{L}_i(j)$ $(1 \leq i \leq t, 1 \leq j \leq p_i - 1)$ als Mittelterm der $\mathcal{O}$-couniversellen Erweiterung (vgl. [**32**])

$$0 \longrightarrow {}_{\mathcal{O}}\mathcal{S}_i(j) \longrightarrow \mathcal{L}_i(j) \longrightarrow \mathcal{S}_i(j) \longrightarrow 0$$

von $\mathcal{S}_i(j)$ und definiere ein Vektorbündel $\overline{\mathcal{L}}$ als Mittelterm der $\mathcal{O}$-couniversellen Erweiterung von $\mathcal{W}$

$$0 \longrightarrow {}_{\mathcal{O}}\mathcal{W} \longrightarrow \overline{\mathcal{L}} \longrightarrow \mathcal{W} \longrightarrow 0.$$

Hierbei sind ${}_{\mathcal{O}}\mathcal{S}_i(j)$ und ${}_{\mathcal{O}}\mathcal{W}$ im additiven Abschluß $\mathrm{add}(\mathcal{O})$ von $\mathcal{O}$.

Satz 3.8.1. *Unter obigen Voraussetzungen gilt:*
(1) *Man hat kurze exakte Folgen*

$$\begin{array}{l}
0 \longrightarrow \mathcal{O}^{\varepsilon d_i} \longrightarrow \mathcal{L}_i(1) \longrightarrow \mathcal{S}_i \longrightarrow 0 \\
0 \longrightarrow \mathcal{L}_i(1) \longrightarrow \mathcal{L}_i(2) \longrightarrow \tau^{-1}\mathcal{S}_i \longrightarrow 0 \\
\qquad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
0 \longrightarrow \mathcal{L}_i(p_i-2) \longrightarrow \mathcal{L}_i(p_i-1) \longrightarrow \tau^{-(p_i-2)}\mathcal{S}_i \longrightarrow 0 \\
0 \longrightarrow \mathcal{O}^{\varepsilon} \longrightarrow \overline{\mathcal{L}} \longrightarrow \mathcal{W} \longrightarrow 0.
\end{array}$$

(2) *Es sind* $\mathrm{End}(\mathcal{L}_i(j)) \simeq \mathrm{End}(\mathcal{S}_i)$ (*kommutative*) *Körper mit* $[\mathrm{End}(\mathcal{S}_i) : k] = \varepsilon d_i$, $\mathrm{End}(\overline{\mathcal{L}})$ *ist ein Schiefkörper mit* $[\mathrm{End}(\overline{\mathcal{L}}) : k] = \varepsilon^2$, *und im Fall* $\varepsilon = 2$ *ein Quaternionenschiefkörper über* $k$. *Ferner hat man die Dimensionen*

$$[\mathrm{Hom}(\mathcal{O}, \mathcal{L}_i(1)) : k] = \varepsilon d_i,$$
$$[\mathrm{Hom}(\mathcal{O}, \mathcal{L}_i(1)) : \mathrm{End}(\mathcal{L}_i(1))] = 1,$$
$$[\mathrm{Hom}(\mathcal{L}_i(p_i-1), \overline{\mathcal{L}}) : \mathrm{End}(\overline{\mathcal{L}})] = d_i,$$
$$[\mathrm{Hom}(\mathcal{L}_i(p_i-1), \overline{\mathcal{L}}) : \mathrm{End}(\mathcal{L}_i(p_i-1))] = \varepsilon.$$

(3) $\mathrm{Hom}(\mathcal{L}_i(j), \mathcal{L}_{i'}(j')) = 0$ *für* $i \neq i'$, *und* $\mathrm{Hom}(\mathcal{L}_i(j), \mathcal{L}_i(j')) = 0$ *für* $j' < j$.
(4) *Die volle Unterkategorie*

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{L}_1(1) \arrow[r] & \mathcal{L}_1(2) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \mathcal{L}_1(p_1-2) \arrow[r] & \mathcal{L}_1(p_1-1) \arrow[dr] & \\
\mathcal{O} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[ddr] & \mathcal{L}_2(1) \arrow[r] & \mathcal{L}_2(2) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \mathcal{L}_2(p_2-2) \arrow[r] & \mathcal{L}_2(p_2-1) \arrow[r] & \overline{\mathcal{L}} \\
 & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
 & \mathcal{L}_t(1) \arrow[r] & \mathcal{L}_t(2) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \mathcal{L}_t(p_t-2) \arrow[r] & \mathcal{L}_t(p_t-1) \arrow[uur] &
\end{tikzcd}$$

*definiert ein Kippbündel* $\mathcal{T}$, *dessen Endomorphismenring* $\Lambda$ *eine kanonische Algebra im Sinne von* [**40**] *ergibt; insbesondere sind die Kategorien* $\mathrm{coh}^H(\mathbb{X})$ *und* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *deriviert äquivalent. Ist* $\mathcal{H}(\Lambda, \mathrm{mod}_0(\Lambda))$ *die zu* $\mathrm{mod}_0(\Lambda)$ *gehörige erbliche Kategorie* (*im Sinne von* [**32**]), *wobei* $\mathrm{mod}_0(\Lambda)$ *die separierende tubulare Familie in* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *ist, die aus den* $\Lambda$*-Moduln vom Rang* $0$ (*=Defekt* $0$) *besteht und mit* $\mathrm{coh}_0^H(\mathbb{X})$ *übereinstimmt, so gilt* $\mathcal{H}(\Lambda, \mathrm{mod}_0(\Lambda)) = \mathrm{coh}^H(\mathbb{X})$.

Beweis. (1) Wie in [**32**, Prop. 5.4].

(2) Da $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}, \mathcal{S}_i) = 0$, folgt $\mathrm{End}(\mathcal{L}_i(j)) \simeq \mathrm{End}(\mathcal{S}_i)$ wie in [**32**, Prop. 5.1]. Ein Argument wie in [**32**, Prop. 5.3] zeigt, daß $\overline{\mathcal{L}}$ keine Selbsterweiterungen hat, und da $[\overline{\mathcal{L}}] = \varepsilon\mathbf{a} + \mathbf{w}$ eine Wurzel in $\mathrm{K}_0(\mathbb{X})$ ist, folgt wie in [**32**, Lem. 5.2], daß $\mathrm{End}(\overline{\mathcal{L}})$ ein Schiefkörper ist, und $\dim_k \mathrm{End}(\overline{\mathcal{L}}) = \langle \varepsilon\mathbf{a} + \mathbf{w}, \varepsilon\mathbf{a} + \mathbf{w} \rangle = \varepsilon^2$. Die weiteren Dimensionsformeln folgen z. B. aus [**30**, Prop. 10.1].

Sei $\varepsilon = 2$, sei $\mathbb{Y} = \mathrm{Proj}^{\mathbb{Z}}(k[X,Y,Z]/Q)$ ($Q$ anisotrope quadratische Form über $k$). Sei $\varphi^* : \mathrm{coh}^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Y}) \longrightarrow \mathrm{coh}^H(\mathbb{X})$ der zu $\varphi_* : \mathrm{coh}^H(\mathbb{X}) \longrightarrow \mathrm{coh}^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Y})$ (wie im Beweis von 3.5.5) rechts-adjungierte Funktor, der $\mathrm{coh}^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Y})$ voll und exakt in $\mathrm{coh}^H(\mathbb{X})$

einbettet (vgl. [**19**, Prop. 9.6]). Sei

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{Y}} \xrightarrow{u} \mathcal{A} \xrightarrow{v} \mathcal{O}_{\mathbb{Y}}(1) \longrightarrow 0 \tag{3.8.1}$$

die Auslander-Reiten-Folge in $\mathrm{coh}^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Y})$ (mit unzerlegbarem Auslander-Bündel $\mathcal{A}$). Dann ist offenbar das Bild unter $\varphi^*$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{X}} \longrightarrow \varphi^*\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{X}}(\vec{x}_0) \longrightarrow 0$$

eine exakte Folge in $\mathrm{coh}^H(\mathbb{X})$, und $\mathrm{End}_{\mathbb{X}}(\varphi^*\mathcal{A}) \simeq \mathrm{End}_{\mathbb{Y}}(\mathcal{A})$ ist ein Quaternionen-schiefkörper (vgl. 2.2.3). Es gibt eine exakte Folge

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{X}}^2 \longrightarrow \overline{\mathcal{L}} \longrightarrow \mathcal{W} \longrightarrow 0.$$

Weil $\mathcal{W} = \varphi^*\mathcal{S}$ mit $\mathcal{S} \in \mathrm{coh}^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Y})$ einfach und das Bild von $\varphi^*$ erweiterungs-abgeschlossen ist, gibt es ein $\mathcal{B} \in \mathrm{coh}^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Y})$ mit $\overline{\mathcal{L}} \simeq \varphi^*\mathcal{B}$, und $\mathcal{B}$ ist unzerlegbar und vom Rang 2, daher $\mathcal{B} \simeq \mathcal{A}(n)$ für ein $n \in \mathbb{Z}$ (nach 2.2.7). Es folgt $\overline{\mathcal{L}} \simeq (\varphi^*\mathcal{A})(n\vec{x}_0)$, und aus Gradgründen $n = 0$, also

$$\overline{\mathcal{L}} \simeq \varphi^*\mathcal{A}.$$

Insbesondere ist $\mathrm{End}(\overline{\mathcal{L}})$ ein Quaternionenschiefkörper.

(3) Folgt wegen [**32**, Prop. 5.1] aus den entsprechenden Beziehungen der $\mathcal{S}_i(j)$.

(4) Wie in [**32**, Prop. 5.5] folgt, daß $\Lambda$ eine kanonische Algebra ist. Die übrigen Aussagen aus (4) folgen dann, weil eine zu [**33**, Thm. 3.2] analoge Aussage gilt: Demnach kann $\mathrm{mod}_{\geq}(\Lambda)$ (der additive Abschluß von $\mathrm{mod}_+(\Lambda) \cup \mathrm{mod}_0(\Lambda)$) identifiziert werden mit der vollen Unterkategorie $\mathrm{coh}^H_{\geq}(\mathbb{X})$ von $\mathrm{coh}^H(\mathbb{X})$, welche aus den Objekten $\mathcal{F}$ besteht, so daß $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{X}}(\mathcal{T}, \mathcal{F}) = 0$ gilt. Ist $\mathcal{F} \in \mathrm{coh}^H(\mathbb{X})$, so gibt es ein $h \in H$ mit $h \geq 0$ und $\mathcal{F}(h) \in \mathrm{coh}^H_{\geq}(\mathbb{X})$. Daraus folgt $\mathcal{H}(\Lambda, \mathrm{mod}_0(\Lambda)) = \mathrm{coh}^H(\mathbb{X})$. $\square$

Mit obigen Bezeichnungen ist die kanonische Algebra $\Lambda$ die Tensoralgebra einer Spezies der Form

$$\begin{tikzcd}
 & F_1 \arrow[r, "F_1"] & F_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & F_1 \arrow[r, "F_1"] & F_1 \arrow[ddr] & \\
 & F_2 \arrow[r, "F_2"] & F_2 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & F_2 \arrow[r, "F_2"] & F_2 \arrow[dr] & \\
k \arrow[uur] \arrow[ur] \arrow[ddr] \arrow[rrrrrr, "{}_F M_k"] & & & & & & F \\
 & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
 & F_t \arrow[r, "F_t"] & F_t \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & F_t \arrow[r, "F_t"] & F_t \arrow[uur] &
\end{tikzcd} \tag{3.8.2}$$

modulo geeigneter Relationen. An den Endpunkten hat man Bimoduln $U_i = {}_{F_i}(U_i)_k$ und $V_i = {}_F(V_i)_{F_i}$, innerhalb der “Arme” sitzen die Bimoduln $F_i = {}_{F_i}(F_i)_{F_i}$.

Im Fall $\varepsilon = 1$ ist $F = k$ und der Bimodul $M = {}_k k_k \oplus {}_k k_k$; im Fall $\varepsilon = 2$ ist der Schiefkörper $F$ der Quaternionenschiefkörper $\mathrm{End}_{\mathbb{Y}}(\mathcal{A}) \simeq \left(\frac{a,b}{k}\right)$ (wobei $Q$ äquivalent ist zu $-aX^2 - bY^2 + abZ^2$) und der Bimodul ${}_F M_k$ isomorph zu $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Y}}(\mathcal{O}_{\mathbb{Y}}, \mathcal{A})$ bzw. ${}_F F_k$.

Für den einfachen Spezialfall, daß alle $d_i = 1$ sind, geben wir die Relationen an.

3.8.2. Sei $\varepsilon = 1$. Dann gilt mit den Bezeichnungen aus 3.8.1 offenbar $\mathcal{L}_i(j) \simeq \mathcal{O}(j\vec{x}_i)$ $(1 \leq i \leq t,\ 1 \leq j \leq p_i - 1)$ und $\overline{\mathcal{L}} \simeq \mathcal{O}(\vec{x}_0)$. Es gilt $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}(j\vec{x}_i), \mathcal{O}((j+1)\vec{x}_i)) \simeq R_{\vec{x}_i} = k\pi_i$ und $\mathrm{Hom}_{\mathbb{X}}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}, \mathcal{O}_{\mathbb{X}}(\vec{x}_0)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Y}}(\mathcal{O}_{\mathbb{Y}}, \mathcal{O}_{\mathbb{Y}}(1)) = S_1$ (mit $S = k[X,Y]$, $\mathbb{Y} = \mathrm{Proj}^{\mathbb{Z}}(S)$). Seien $\pi'_i \in S_1 = R_{\vec{x}_0}$ paarweise nicht-assoziierte homogene Primelemente in $S$, in die die Gewichte eingefügt worden sind (wobei triviales Gewicht 1 zugelassen ist), also $\pi_i^{p_i} = \pi'_i$ $(i = 1, \ldots, t)$.

Es ist $\pi'_1$, $\pi'_2$ eine $k$-Basis von $S_1$. Seien $\lambda_i \in k^*$ (paarweise verschieden) mit $\pi'_i \sim \pi'_1 + \lambda_i \pi'_2$ $(i = 3, \ldots, t)$, ohne Einschränkung gelte hier Gleichheit. Dann ergeben sich die Relationen

$$\pi_i^{p_i} = \pi_1^{p_1} + \lambda_i \pi_2^{p_2} \qquad i = 3, \ldots, t$$

(und es kann im Fall $t \geq 2$ aus der Spezies (3.8.2) der Pfeil, der die Quelle mit der Senke verbindet, gestrichen werden).

3.8.3. Sei $\varepsilon = 2$. Mit obigen Bezeichnungen ist $S = k[X,Y,Z]/Q$. Seien $\pi'_1, \ldots, \pi'_t \in S_1 = kx \oplus ky \oplus kz$ die Primelemente, in die die Gewichte eingefügt worden sind.

Sei $i \in \{1, \ldots, t\}$. Man kann ${}_{F_i}(U_i)_k$ identifizieren mit ${}_{F_i}(F_i)_k$, ${}_F(V_i)_{F_i}$ mit ${}_F F_{F_i}$, und man kann $F_i$ als Teilkörper von $F$ auffassen. Tensorieren entspricht der Komposition von Abbildungen. Den Bimodul ${}_F M_k$ identifiziere man dabei mit ${}_F F_k$, indem man das Element $u \in M$ (aus der exakten Folge (3.8.1)) mit $1 \in F$ identifiziert. Bezeichne die zu den Einselementen im $i$-ten "Arm" gehörigen Elemente in der Tensoralgebra mit dem gemeinsamen Symbol $u_i$. Dann wird das Ideal der Relationen erzeugt von

$$u_1 \otimes u_1 \otimes \ldots \otimes u_1 \otimes u_1 - u_i \otimes u_i \otimes \ldots \otimes u_i \otimes u_i \quad (i = 2, \ldots, t), \tag{3.8.3}$$

wobei der erste Summand $p_1$ Faktoren und der zweite Summand $p_i$ Faktoren enthält.

Außerdem erhält man nach diesen Identifikationen folgendes: Aus (3.8.1) bekommt man die kurze exakte Folge

$$0 \longrightarrow k \longrightarrow F \xrightarrow{\sigma} S_1 \longrightarrow 0.$$

Ist $i \in \{1, \ldots, t\}$ und $b_i \in F_i \setminus k$, so gilt $0 \neq \sigma(b_i) \in k\pi'_i$. (Dies folgt leicht mit dem kommutativen Diagramm aus dem Beweis von [**32**, Prop. 5.5], welches man hier analog erhält, sowie Anwendung des Funktors $\varphi_*$ (aus dem Beweis von 3.8.1) auf dieses Diagramm.) Auf diese Weise steht also der $i$-te "Arm" mit dem Punkt $\pi'_i$ in Beziehung.

## 3.9. Kommutative Realisierbarkeit

Definition 3.9.1. Sei $(V, \mathbf{w})$ ein kanonisches Gitter. $V$ heißt *kommutativ realisierbar über $k$*, wenn es eine $H$-graduierte kommutative $k$-Algebra $R$ gibt, die **(F1)**–**(F3)** erfüllt und das homologische Geschlecht null hat, so daß die bilinearen Gitter $(V, \mathbf{w})$ und $\mathrm{K}_0(\mathbb{X})$ rangisomorph sind (vgl. Abschnitt A.1), wobei $\mathbb{X} = \mathrm{Proj}^H(R)$ und $\mathrm{K}_0(\mathbb{X})$ mit der Eulerform, der Auslander-Reiten-Translation und dem Rang von Garben ausgestattet ist.

Bemerkung. (1) Ist das kanonische Gitter *nicht* tubular, so braucht man nur Isomorphie zu fordern. Die Rangisomorphie folgt dann, weil je zwei Ränge auf $V$ ähnlich sind.

(2) Wir werden später sehen, daß z. B. das tubulare kanonische Gitter mit Symbol $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ isomorph ist zum tubularen kanonischen Gitter mit Symbol $(2\ 2 \mid 2)$. Während das zweite über $\mathbb{R}$ kommutativ realisierbar ist, ist das erste über *keinem* Körper kommutativ realisierbar.

Die folgenden beiden Aussagen sind Folgerungen aus Satz 3.7.3 und Lemma A.2.11.

Satz 3.9.2. *Sei $k$ ein Körper und $(V, \mathbf{w})$ ein kanonisches Gitter mit Symbol*

$$\sigma[V] = \left( \begin{array}{c|c} p_1, \ldots, p_t & \\ d_1, \ldots, d_t & \varepsilon \\ f_1, \ldots, f_t & \end{array} \right).$$

*Genau dann ist $V$ realisierbar durch eine kommutative graduiert faktorielle Algebra, die durch Einfügung von Gewichten aus der Polynomalgebra $k[X, Y]$ hervorgeht, wenn $\varepsilon = 1$, $d_i = f_i$ $(i = 1, \ldots, t)$ und $k$ folgende Eigenschaft hat: In $k[X, Y]$ gibt es paarweise nicht-assoziierte homogene Primelemente $\pi_1, \ldots, \pi_t$ mit $\operatorname{grad} \pi_i = d_i$ $(i = 1, \ldots, t)$.* □

Satz 3.9.3. *Sei $k$ ein Körper (mit $\operatorname{char} k \neq 2$), sei $Q$ eine anisotrope ternäre quadratische Form über $k$, und sei $(V, \mathbf{w})$ ein kanonisches Gitter mit Symbol*

$$\sigma[V] = \left( \begin{array}{c|c} p_1, \ldots, p_t & \\ d_1, \ldots, d_t & \varepsilon \\ f_1, \ldots, f_t & \end{array} \right).$$

*Genau dann ist $V$ realisierbar durch eine kommutative graduiert faktorielle Algebra, die durch Einfügung von Gewichten aus der Algebra $k[X, Y, Z]/Q$ hervorgeht, wenn $\varepsilon = 2$, $d_i = f_i$ $(i = 1, \ldots, t)$ und $k$ folgende Eigenschaft hat: In $k[X, Y, Z]/Q$ gibt es paarweise nicht-assoziierte homogene Primelemente $\pi_1, \ldots, \pi_t$ mit $\operatorname{grad} \pi_i = d_i$ $(i = 1, \ldots, t)$.* □

3.9.4 (Algebraisch abgeschlossener Grundkörper). Es gibt keine anisotrope quadratische Form über algebraisch abgeschlossenem Körper. Jedes homogene Primpolynom in $k[X, Y]$ ist vom Grad 1. Daher sind genau die Symbole der folgenden Form kommutativ realisierbar: $(p_1\ p_2\ \ldots\ p_t)$.

3.9.5 (Reell abgeschlossener Grundkörper). Jede anisotrope ternäre quadratische Form ist über reell abgeschlossenem Körper äquivalent zu $aX^2 + bY^2 + cZ^2$ mit $a$, $b$, $c > 0$. Jedes homogene Primelement in $k[X, Y, Z]/(aX^2 + bY^2 + cZ^2)$ hat Grad 1. In $k[X, Y]$ hat jedes homogene Primelement Grad 1 oder 2. Es sind also genau die folgenden Symbole kommutativ realisierbar: $(p_1\ p_2\ \ldots\ p_t \mid 2)$ und

$$\begin{pmatrix} p_1, \ldots, p_l, p_{l+1}, \ldots, p_t \\ 1, \ldots, 1, 2, \ldots, 2 \\ 1, \ldots, 1, 2, \ldots, 2 \end{pmatrix}.$$

3.9.6 (Endliche Grundkörper und Funktionenkörper). (Wir betrachten nur Körper der Charakteristik $\neq 2$.) Es gibt keine anisotrope ternäre quadratische Form über endlichen Körpern, da deren Brauergruppen trivial sind [**26**, Ch. 3, Cor. 2.10] oder [**45**, I.2.2]). Daher lassen sich die Fälle mit $\varepsilon = 2$ nicht realisieren. Das gleiche gilt für algebraische Körpererweiterungen von $\mathbb{C}(X)$ (vgl. [**26**, Ch. 4, Ex. 1.5]).

## 3.10. Grundkörper der rationalen Zahlen

Sei $k = \mathbb{Q}$ der Körper der rationalen Zahlen und $R = k[X, Y, Z]/Q$, wobei $Q$ eine anisotrope, ternäre quadratische Form über $\mathbb{Q}$ ist.

Für die kommutative Realisierbarkeit von Symbolen mit $\varepsilon = 2$ ist die Beantwortung der folgenden Frage von Interesse.

Problem. Gibt es in $R$ zu jedem Grad $n \in \mathbb{N}$ unendlich viele (paarweise nicht-assoziierte) homogene Primelemente vom Grad $n$?

Wir vermuten, daß dies gilt. Die folgenden Sätze geben eine partielle Antwort.

Proposition 3.10.1. *Sei $Q(X, Y, Z) = X^2 + Y^2 + Z^2$. Sei $p$ eine Primzahl, so daß $p - 1$ kein Quadrat ist. Dann ist $x^2 + py^2$ prim in $R$.*

Beweis. Nehme an, daß

$$x^2 + py^2 = (f_1(x, y) + \alpha_1 z)(f_2(x, y) + \alpha_2 z),$$

mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$, $\alpha_1$, $\alpha_2$ nicht beide $= 0$ (da das entsprechende Element in $\mathbb{Q}[X, Y]$ prim ist). Dann folgt

$$X^2 + pY^2 - f_1 f_2(X, Y) - (\alpha_1 f_2(X, Y) + \alpha_2 f_1(X, Y))Z - \alpha_1\alpha_2 Z^2 = \alpha(X^2 + Y^2 + Z^2),$$

mit einem $\alpha \in \mathbb{Q}$. Es folgt

$$\begin{gathered} \alpha = -\alpha_1\alpha_2 \\ \alpha_1 f_2(X, Y) = -\alpha_2 f_1(X, Y) \\ X^2 + pY^2 - f_1 f_2(X, Y) = \alpha(X^2 + Y^2). \end{gathered}$$

$\alpha = 0$ ist nicht möglich, denn sonst wäre etwa $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 \neq 0$, und dann $f_1(X, Y) = 0$, Widerspruch. Also ist $\alpha \neq 0$. Dann $f_2(X, Y) = cf_1(X, Y)$ mit $c = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$. Es folgt

$$(1 - \alpha)X^2 + (p - \alpha)Y^2 = cf_1(X, Y)^2.$$

Ist $f_1(X, Y) = aX + bY$, so folgt

$$(1 - \alpha)X^2 + (p - \alpha)Y^2 = c(a^2X^2 + 2abXY + b^2Y^2),$$

und das ergibt $a = 0$ oder $b = 0$.

1. Fall: $a = 0$. Dann ist $\alpha = 1$ und $p - 1 = cb^2 = (\alpha_2 b)^2$, was nicht geht, weil $p - 1$ kein Quadrat ist.

2. Fall: $b = 0$. Dann ist $\alpha = p$ und $1 - p = ca^2$, und es folgt $p(p - 1) = (\alpha_2 a)^2$, was auch nicht sein kann. □

Proposition 3.10.2. *Sei $R = \mathbb{Q}[X, Y, Z]/Q$, wobei $Q$ anisotrop ist. Die Menge aller $n \in \mathbb{N}$, für die es ein homogenes Primelement vom Grad $n$ gibt, ist nach oben unbeschränkt.*

Beweis. Man kann o. E. annehmen, daß $Q = aX^2 + bY^2 + Z^2$ ($a$, $b \in \mathbb{Q}$) gilt. Es ist $R = \mathbb{Q}[X, Y][(-aX^2 - bY^2)^{1/2}]$ auch eine $H = \mathbb{L}(\mathbf{p}, \mathbf{d})$-graduierte Algebra mit $\mathbf{p} = (1, 1, 2)$ und $\mathbf{d} = (1, 1, 2)$, und die Torsionsuntergruppe von $\mathbb{L}(\mathbf{p}, \mathbf{d})$ ist $\mathbb{Z}_2$. Sei $\delta : \mathbb{L}(\mathbf{p}, \mathbf{d}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ der Homomorphismus, der $\vec{x}$, $\vec{y}$ und $\vec{z}$ auf 1 abbildet. Der Kern von $\delta$ ist dann $\langle \vec{z} - \vec{x} \rangle \simeq \mathbb{Z}_2$, und via $\delta$ kann man $R$ auch $\mathbb{L}(\mathbf{p}, \mathbf{d})$-graduiert betrachten, und dies induziert kanonische Funktoren

$$F_\bullet : \mathrm{Mod}^H(R) \longrightarrow \mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}}(R),\ (F_\bullet M)_n = \bigoplus_{\delta(h)=n} M_h$$

(Push-Down-Funktor) und

$$F^\bullet : \mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}}(R) \longrightarrow \mathrm{Mod}^H(R),\ (F^\bullet M)_h = M_{\delta(h)}$$

(Pull-Up-Funktor), und es gilt

$$F^\bullet F_\bullet M \simeq M \oplus M(\vec{z} - \vec{x}),\ F_\bullet F^\bullet N \simeq N \oplus N.$$

Es werden dann Funktoren $\phi_\bullet$ und $\phi^\bullet$ definiert durch die folgenden Diagramme, wobei $\mathbb{X} = \mathrm{Proj}^H(R)$ und $\mathbb{Y} = \mathrm{Proj}^{\mathbb{Z}}(R)$:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Qcoh}^H(\mathbb{X}) \arrow[r, "\phi_\bullet"] \arrow[d, "\Gamma(\mathbb{X},-)"'] & \mathrm{Qcoh}^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Y}) \\
\mathrm{Mod}^H(R) \arrow[r, "F_\bullet"] & \mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}}(R) \arrow[u, "\tilde{\cdot}"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Qcoh}^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Y}) \arrow[r, "\phi^\bullet"] \arrow[d, "\Gamma(\mathbb{Y},-)"'] & \mathrm{Qcoh}^H(\mathbb{X}) \\
\mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}}(R) \arrow[r, "F^\bullet"] & \mathrm{Mod}^H(R) \arrow[u, "\tilde{\cdot}"']
\end{tikzcd}$$

Es gilt

$$\phi_\bullet \mathcal{O}_{\mathbb{X}} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{Y}}$$

und

$$\phi_\bullet(\mathcal{F}(h)) \simeq \phi_\bullet(\mathcal{F})(\delta(h))$$

für jedes $\mathcal{F} \in \mathrm{coh}^H(\mathbb{X})$ und $h \in H$. Wenn

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{X}} \xrightarrow{\cdot\pi} \mathcal{O}_{\mathbb{X}}(\vec{\pi}) \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow 0,$$

exakt ist, wobei $\pi$ ein $H$-homogenes Primelement ist, so ist auch

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{Y}} \xrightarrow{\cdot\pi} \mathcal{O}_{\mathbb{Y}}(\delta(\vec{\pi})) \longrightarrow \phi_\bullet\mathcal{S} \longrightarrow 0$$

exakt. Also hat $\phi_\bullet\mathcal{S}$ endliche Länge, und es ist $\deg \phi_\bullet\mathcal{S} = \delta(\vec{\pi}) = \deg \mathcal{S}$. Wendet man nun $\phi^\bullet$ auf die letzte exakte Sequenz an, so erhält man die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{X}} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{X}}(\vec{z} - \vec{x}) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{X}}(\vec{\pi}) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{X}}(\vec{\pi} + \vec{z} - \vec{x}) \longrightarrow \phi^\bullet\phi_\bullet\mathcal{S} \longrightarrow 0.$$

Es folgt, daß $\phi^\bullet\phi_\bullet\mathcal{S} \simeq \mathcal{S} \oplus \mathcal{S}(\vec{z} - \vec{x})$, also $\ell(\phi^\bullet\phi_\bullet\mathcal{S}) = 2$. Es folgt dann $\ell(\phi_\bullet\mathcal{S}) \le 2$.

In $R$ gibt es die $H$-homogenen Primelemente $x^d + py^d$ ($d \in \mathbb{N}$, $p$ Primzahl). Diese zerfallen nach dem Vorherigen in höchstens zwei $\mathbb{Z}$-homogene Primelemente (vgl. 1.4.2), und daraus folgt die Behauptung. $\square$

Bemerkung. Sei $Q = X^2 + Y^2 + Z^2$. Die Voraussetzung "$p - 1$ kein Quadrat" in 3.10.1 ist notwendig, und in 3.10.2 können die $H$-homogenen Primelemente in zwei $\mathbb{Z}$-homogene Primelemente zerfallen: Sei $p$ eine Primzahl und $p - 1 = a^2$ ein Quadrat. $x^2 + py^2$ ist $H$-homogen prim, aber nicht $\mathbb{Z}$-homogen prim, denn $x^2 + py^2 = (z - ay)(z + ay)$.

## 3.11. Die domestizierten und tubularen Fälle

Die Tabellen 3.1 und 3.2 geben für die domestizierten und tubularen Symbole ([**30**], vgl. auch Anhang A), die kommutativ realisierbar sind, jeweils ein Beispiel für eine kommutative Realisierung an. Die angegebenen graduierten Algebren (bzw. deren Graduierungsgruppen) erhält man durch Einfügen von Gewichten aus den Algebren $k[X,Y]$ (im Fall $\varepsilon = 1$) oder $k[X,Y,Z]/(X^2 + Y^2 + Z^2)$ (im Fall $\varepsilon = 2$) über einem geeigneten Körper $k$ (bzw. aus der Gruppe $\mathbb{Z}$).

Die Realisierung des tubularen Symbols $\left(\begin{array}{c|c} 2 & \\ 2 & 2 \\ 2 & \end{array}\right)$ über $\mathbb{Q}$ erhält man mit 3.10.1.

| Symbol | Körper | Faktorielle Algebra | Graduierung |
|---|---|---|---|
| $(p)$ | bel. | $k[X,Y]$ | $\mathbb{L}(1,p)$ |
| $\begin{pmatrix} p \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ | $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ | $k[X,Y,Z]/(Z^p - X^2 - Y^2)$ | $\mathbb{L}((1,1,p),(1,1,2))$ |
| $\left(\begin{array}{c\|c} p & 2 \end{array}\right)$ | $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ | $k[X,Y,Z]/(X^2 + Y^2 + Z^{2p})$ | $\mathbb{L}(1,1,p)$ |
| $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ | $\mathbb{Q}$ | $\mathbb{Q}[X,Y,Z]/(Z^2 - X^3 - 2Y^3)$ | $\mathbb{L}((1,1,2),(1,1,3))$ |
| $(p_1 \;\; p_2)$ | bel. | $k[X,Y]$ | $\mathbb{L}(p_1,p_2)$ |
| $\begin{pmatrix} 2 & n \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ | $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ | $k[X,Y,Z]/(Z^2 - X^2 - Y^{2n})$ | $\mathbb{L}((1,n,2),(1,1,2))$ |
| $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ | $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ | $k[X,Y,Z]/(Z^3 - X^2 - Y^4)$ | $\mathbb{L}((1,2,3),(1,1,2))$ |
| $(2 \;\; 2 \;\; n)$ | bel. | $k[X,Y,Z]/(X^2 + Y^2 + Z^n)$ | $\mathbb{L}(2,2,n)$ |
| $(2 \;\; 3 \;\; 3)$ | bel. | $k[X,Y,Z]/(X^2 + Y^3 + Z^3)$ | $\mathbb{L}(2,3,3)$ |
| $(2 \;\; 3 \;\; 4)$ | bel. | $k[X,Y,Z]/(X^2 + Y^3 + Z^4)$ | $\mathbb{L}(2,3,4)$ |
| $(2 \;\; 3 \;\; 5)$ | bel. | $k[X,Y,Z]/(X^2 + Y^3 + Z^5)$ | $\mathbb{L}(2,3,5)$ |

Tabelle 3.1. Realisierung der domestizierten Symbole

| Symbol | Körper | Faktorielle Algebra | Graduierung |
|---|---|---|---|
| $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ | $\mathbb{Q}$ | $\mathbb{Q}[X,Y,Z]/(Z^2 - X^4 - Y^4)$ | $\mathbb{L}\begin{pmatrix} 1,1,2 \\ 1,1,4 \end{pmatrix}$ |
| $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ | $\mathbb{Q}$ | $\mathbb{Q}[X,Y,Z]/(Z^3 - X^3 - Y^3)$ | $\mathbb{L}\begin{pmatrix} 1,1,3 \\ 1,1,3 \end{pmatrix}$ |
| $\left(\begin{array}{c\|c} 2 & \\ 2 & 2 \\ 2 & \end{array}\right)$ | $\mathbb{Q}$ | $\mathbb{Q}[X,Y,Z,W]/\begin{pmatrix} X^2+Y^2+Z^2, \\ W^2 - X^2 - 3Y^2 \end{pmatrix}$ | $\mathbb{L}\begin{pmatrix} 1,1,1,2 \\ 1,1,1,2 \end{pmatrix}$ |
| $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ | $\mathbb{Q}$ | $\mathbb{Q}[X,Y,Z]/(Z^2 - X^3 - 2Y^6)$ | $\mathbb{L}\begin{pmatrix} 1,2,2 \\ 1,1,3 \end{pmatrix}$ |
| $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ | $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ | $k[X,Y,Z]/(Z^4 - X^2 - Y^4)$ | $\mathbb{L}\begin{pmatrix} 1,2,4 \\ 1,1,2 \end{pmatrix}$ |
| $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ | $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ | $k[X,Y,U,V]/\begin{pmatrix} U^2 - X^2 - Y^2, \\ V^2 - X^2 - 2Y^2 \end{pmatrix}$ | $\mathbb{L}\begin{pmatrix} 1,1,2,2 \\ 1,1,2,2 \end{pmatrix}$ |
| $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ | $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ | $k[X,Y,Z]/(Z^3 - X^2 - Y^6)$ | $\mathbb{L}\begin{pmatrix} 1,3,3 \\ 1,1,2 \end{pmatrix}$ |
| $\left(\begin{array}{cc\|c} 2 & 2 & 2 \end{array}\right)$ | $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ | $k[X,Y,Z]/(X^2 + Y^4 + Z^4)$ | $\mathbb{L}(1,2,2)$ |
| $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ | bel. | $k[X,Y,Z]/(X^2 + Y^3 + Z^6)$ | $\mathbb{L}(2,3,6)$ |
| $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ | bel. | $k[X,Y,Z]/(X^2 + Y^4 + Z^4)$ | $\mathbb{L}(2,4,4)$ |
| $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ | bel. | $k[X,Y,Z]/(X^3 + Y^3 + Z^3)$ | $\mathbb{L}(3,3,3)$ |
| $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ | $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ | $k[X,Y,Z]/(Z^2 + X^4 + Y^4)$ | $\mathbb{L}\begin{pmatrix} 2,2,2 \\ 1,1,2 \end{pmatrix}$ |
| $(2\ 2\ 2\ 2)$ | $\|k\| > 2$ | $k[X,Y,U,V]/\begin{pmatrix} U^2 + X^2 + Y^2, \\ V^2 + X^2 + \lambda Y^2 \end{pmatrix}$ $\lambda \neq 0,1$ | $\mathbb{L}(2,2,2,2)$ |

TABELLE 3.2. Realisierung der tubularen Symbole

KAPITEL 4

# Tubulare exzeptionelle Kurven

## 4.1. Die Resultate

In diesem Kapitel sei $k$ ein Körper. Wir formulieren die Hauptergebnisse dieses Kapitels. Die benötigten Begriffe werden in darauffolgenden Abschnitten erläutert.

Wir verwenden den Begriff einer exzeptionellen Kurve und der Kategorie der kohärenten Garben darüber (vgl. [**31**], [**29**]). Sei $\mathbb{X}$ eine tubulare exzeptionelle Kurve. Die Automorphismengruppe der Grothendieck-Gruppe induziert eine Operation auf der Menge $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$. Die Bahnen dieser Operation heißen Anstiegsklassen (Definition A.3.4). Im Gegensatz zum algebraisch abgeschlossenen Fall, wo nur eine Anstiegsklasse existiert, können im allgemeinen zwei Anstiegsklassen auftreten.

Satz 4.1.1. *Sei $k$ ein Körper und $\mathbb{X}$ eine tubulare exzeptionelle Kurve. Dann hat die Grothendieck-Gruppe* $\mathrm{K}_0(\mathbb{X})$ *höchstens zwei Anstiegsklassen in $\overline{\mathbb{Q}}$; diese liegen jeweils dicht in $\overline{\mathbb{Q}}$. Es gibt Fälle, die genau zwei Anstiegsklassen haben.*

Diese Aussage wird im Anhang A.5 bewiesen. Im Anhang A befinden sich die K-theoretischen Grundlagen für das vorliegende Kapitel.

Sei $\mathcal{H} = \mathrm{coh}(\mathbb{X})$ die Kategorie der kohärenten Garben über der tubularen exzeptionellen Kurve $\mathbb{X}$. Auf $\mathcal{H}$ hat man den Begriff eines Anstiegs, und man definiert dann für jedes $q \in \overline{\mathbb{Q}}$ die volle Unterkategorie $\mathcal{H}^{(q)}$, die aus den semistabilen Objekten vom Anstieg $q$ besteht. Diese Röhrenkategorien überdecken die gesamte Kategorie $\mathrm{coh}(\mathbb{X})$. Satz 4.1.1 ist verantwortlich für das Auftreten von maximal zwei unterschiedlichen Typen von solchen Röhrenkategorien.

Theorem 6. *Sei $k$ ein Körper und $\mathbb{X}$ eine tubulare exzeptionelle Kurve, so daß der Rang der Grothendieck-Gruppe* $\mathrm{K}_0(\mathbb{X})$ *größer als drei ist. Sei* $\mathcal{H} = \mathrm{coh}(\mathbb{X})$ *die Kategorie der kohärenten Garben über $\mathbb{X}$. Dann ist jede Röhrenkategorie $\mathcal{H}^{(q)}$ $(q \in \overline{\mathbb{Q}})$ nicht-trivial, und die Automorphismengruppe* $\mathrm{Aut}\,\mathrm{D}^b(\mathbb{X})$ *der derivierten Kategorie* $\mathrm{D}^b(\mathbb{X})$ *von* $\mathrm{coh}(\mathbb{X})$ *operiert auf der Menge der Röhrenkategorien $\mathcal{H}^{(q)}[n]$ $(q \in \overline{\mathbb{Q}}$, $n \in \mathbb{Z})$ mit höchstens zwei Bahnen. Diese Bahnen korrespondieren mit den Anstiegsklassen von* $\mathrm{K}_0(\mathbb{X})$ *in $\overline{\mathbb{Q}}$.*

In Theorem 7 auf Seite 59 findet man eine stärkere und präzisere Fassung dieses Theorems. Dort werden auch die meisten derjenigen Fälle behandelt, in denen die Grothendieck-Gruppe vom Rang drei ist. Als Anwendung ergibt sich ein Struktursatz für die Moduln über einer tubularen versteckt-kanonischen Algebra (Theorem 8, Seite 68). Wir präsentieren an dieser Stelle ein Beispiel, welches die Struktur einer solchen Modulkategorie verdeutlicht. Es ist ein Beispiel einer kanonischen Algebra über den reellen Zahlen, welches die auftretenden Effekte über nicht-algebraisch-abgeschlossenem Körper illustriert. Der Zugang ergibt sich durch eine kommutative graduiert faktorielle Algebra.

Beispiel 4.1.2. Sei $R$ die $\mathbb{L}(2,2)$-graduiert faktorielle Algebra

$$\mathbb{R}[X,Y,Z]/(X^2+Y^4+Z^4),$$

die aus $\mathbb{R}[X,Y,Z]/(X^2+Y^2+Z^2)=\mathbb{R}[x,y,z]$ durch Einfügung des Gewichts 2 in $y$ und $z$ entsteht. Das graduiert projektive Spektrum $\mathbb{X}$ definiert eine tubulare exzeptionelle Kurve. Die tubulare kanonische $\mathbb{R}$-Algebra $\Lambda_1$ mit unterliegender Spezies

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{C} \arrow[dr, "\mathbb{H}"] & \\
\mathbb{R} \arrow[ur, "\mathbb{C}"] \arrow[rr, "\mathbb{H}"] \arrow[dr, "\mathbb{C}"'] & & \mathbb{H}, \\
 & \mathbb{C} \arrow[ur, "\mathbb{H}"'] &
\end{tikzcd}$$

wobei hier gewisse Relationen gelten, läßt sich als Kippbündel in $\mathcal{H}=\mathrm{coh}(\mathbb{X})$ realisieren. Die Kategorie der unzerlegbaren Moduln über $\Lambda_1$ hat die folgende Struktur:

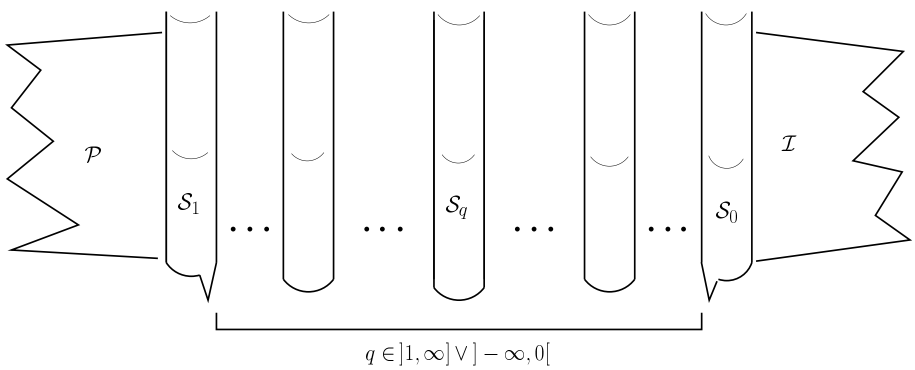


Abbildung 4.1. Die Struktur von $\operatorname{ind}\Lambda_1$

Es ist $\mathcal{P}$ die präprojektive Komponente, $\mathcal{I}$ die präinjektive Komponente. $\mathcal{S}_1$ ist eine Röhrenfamilie, die eine Röhre mit einem projektiven Modul enthält. Entsprechend ist $\mathcal{S}_0$ eine Röhrenfamilie, die eine Röhre mit einem injektiven Modul enthält. Für jedes $q \in \,]1,\infty] \vee\, ]-\infty,0[$ hat man eine separierende Röhrenfamilie aus stabilen Röhren $\mathcal{S}_q$ (die sich aus den Röhrenkategorien $\mathcal{H}^{(q)}$ ergeben). (Dabei ist $]1,\infty] \vee\, ]-\infty,0[$ die Vereinigung der in $\overline{\mathbb{Q}}$ gebildeten Intervalle, und diese ist so geordnet, daß die einzelnen Intervalle ihre natürliche Ordnung behalten und daß jedes Element in $]-\infty,0[$ größer ist als jedes Element in $]1,\infty]$; es gilt dann $\mathrm{Hom}(\mathcal{S}_q,\mathcal{S}_{q'})\neq 0$ nur für $q\leq q'$.) Diese stabilen Röhrenfamilien zerfallen in zwei Isomorphieklassen: Sei $q=\frac{a}{b}$, wobei $a$ und $b$ teilerfremd sind.

- Sei $b$ gerade. Dann hat jedes einfache Objekt in $\mathcal{S}_q$ Endomorphismenring $\mathbb{C}$.
- Sei $b$ ungerade. Dann kommt jeder der Schiefkörper $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ vor als Endomorphismenring eines einfachen Objektes in $\mathcal{S}_q$.

Insbesondere sind die Kategorien $\mathcal{S}_q$ und $\mathcal{S}_{q'}$ nicht äquivalent, falls die Nenner von $q$ und $q'$ nicht-kongruent modulo 2 sind. Umgekehrt gilt: Sind die Nenner von $q$ und $q'$ kongruent modulo 2, so gibt es einen Automorphismus auf der derivierten Kategorie

$D^b(\Lambda_1)$ von $\mathrm{mod}(\Lambda_1)$, der $\mathcal{S}_q$ in $\mathcal{S}_{q'}$ überführt; insbesondere sind dann $\mathcal{S}_q$ und $\mathcal{S}_{q'}$ äquivalent.

Es gibt eine weitere tubulare kanonische $\mathbb{R}$-Algebra $\Lambda_2$, die sich ebenfalls als Kippbündel in $\mathrm{coh}(\mathbb{X})$ realisieren läßt, mit unterliegender Spezies

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{R} \arrow[dr, "\mathbb{C}"] & \\
\mathbb{C} \arrow[ur, "\mathbb{C}"] \arrow[rr, "\mathbb{C}\oplus\overline{\mathbb{C}}"] \arrow[dr, "\mathbb{H}"'] & & \mathbb{C} \\
& \mathbb{H} \arrow[ur, "\mathbb{H}"'] &
\end{tikzcd}$$

(und gewissen Relationen) mit folgenden Eigenschaften:

- $\Lambda_1$ und $\Lambda_2$ sind deriviert-äquivalent. Genauer: $\Lambda_1$ ist versteckt-kanonisch (insbesondere gekippt) vom Typ $\Lambda_2$, und $\Lambda_2$ ist versteckt-kanonisch vom Typ $\Lambda_1$.
- $\Lambda_1$ und $\Lambda_2$ sind nicht isomorph.
- Der unterliegende Bimodul von $\Lambda_1$ ist vom Typ $(4, 1)$, der von $\Lambda_2$ vom Typ $(2, 2)$.

Das Auftreten von zwei Isomorphieklassen von separierenden tubularen Familien (von stabilen Röhren) einer tubularen Algebra ist ein Phänomen, welches über algebraisch abgeschlossenem Körper nicht in Erscheinung tritt (vgl. [**39**], [**34**]).

Die neu auftretenden Effekte im tubularen Fall über nicht-algebraisch-abgeschlossenem Körper können also mit Hilfe der Theorie der graduiert faktoriellen Algebren erreicht und gut beschrieben werden. Dieser Zugang funktioniert allgemein für viele der tubularen Fälle. Es sei aber betont, daß sich nicht jeder der tubularen Fälle durch eine kommutative graduiert faktorielle Algebra realisieren läßt.

Das fundamentale Konzept zum Beweis der Hauptergebnisse dieses Kapitels ist die Konstruktion von sogenannten Mutationen an Röhren (oder auch Verschiebungsautomorphismen) auf der derivierten Kategorie sowie die Konstruktion einer Kategorie mit Eigenschaften einer "Garbenkategorie", vgl. [**32**], wodurch die Verbindung zu den exzeptionellen Kurven und den kohärenten Garben darüber gegeben ist.

Diese Garbenkategorien sind erblich, und daher ist der Übergang zur derivierten Kategorie sehr einfach. In der Tat werden wir es wie in [**18, 34**] vorziehen, in der Garbenkategorie anstatt der Modulkategorie zu arbeiten. Ergebnisse lassen sich dann leicht auf die Modulkategorie übertragen.

Ein weiterer wichtiger Bestandteil der Beweise ist die Klassifikation der tubularen Symbole [**30**], also der Grothendieck-Gruppen der tubularen Algebren, wie wir sie im Anhang A.5 vornehmen.

Ein weiteres Ergebnis dieses Kapitels bezieht sich auf die Darstellbarkeit von Wurzeln in der Grothendieck-Gruppe als Klassen von unzerlegbaren Garben (Satz 4.8.3). Ferner zeigen wir, daß sich jedes tubulare Symbol (ein abstraktes Modell für eine Grothendieck-Gruppe einer tubularen Algebra) realisieren läßt als Grothendieck-Gruppe einer tubularen kanonischen Algebra über einem geeigneten Körper (Satz 4.7.4).

## 4.2. Garbenkategorien über exzeptionellen Kurven

In [**32**] werden die (zusammenhängenden) versteckt-kanonischen Algebren charakterisiert als diejenigen zusammenhängenden Artin-Algebren $\Sigma$, deren Kategorie der endlich erzeugten Rechtsmoduln $\mathrm{mod}(\Sigma)$ eine aufrichtige separierende exakte Unterkategorie $\mathrm{mod}_0(\Sigma)$ besitzt, die $\mathrm{mod}_+(\Sigma)$ von $\mathrm{mod}_-(\Sigma)$ separiert. Es gilt also

$$\mathrm{mod}(\Sigma) = \mathrm{mod}_+(\Sigma) \vee \mathrm{mod}_0(\Sigma) \vee \mathrm{mod}_-(\Sigma).$$

In [**32**] wird einer solchen Algebra $\Sigma$ mit fixierter separierender tubularer Familie $\mathrm{mod}_0(\Sigma)$ eine erbliche Kategorie $\mathcal{H}(\Sigma) = \mathcal{H}(\Sigma, \mathrm{mod}_0(\Sigma))$ zugeordnet, die die Voraussetzungen des folgenden Satzes erfüllt. Im folgenden sei $\Sigma$ immer zusammenhängend und versteckt-kanonisch. Ist $\Lambda$ eine *kanonische* $k$-Algebra im Sinne von [**40**], so bezeichnen wir die volle Unterkategorie von $\mathrm{mod}(\Lambda)$ der Moduln vom Defekt null ([**40**]) als *zentrale* separierende tubulare Familie.

Proposition 4.2.1 (Lenzing [**29**]). *Sei $\mathcal{H}$ eine abelsche, kleine $k$-Kategorie ohne Projektive $\neq 0$, welche erblich und noethersch ist, und einen Kippkomplex besitzt. Dann gibt es eine kanonische Algebra $\Lambda$, so daß $\mathcal{H}$ äquivalent ist zu $\mathcal{H}(\Lambda) = \mathcal{H}(\Lambda, \mathrm{mod}_0(\Lambda))$, wobei $\mathrm{mod}_0(\Lambda)$ die zentrale separierende tubulare Familie in $\mathrm{mod}(\Lambda)$ bezeichnet.* $\square$

Über algebraisch abgeschlossenem Körper $k$ sind die Kategorien mit obiger Eigenschaft gerade die Kategorien $\mathrm{coh}(\mathbb{X})$ über gewichteten projektiven Kurven $\mathbb{X}$, vgl. [**27**]. Wir bezeichnen $\mathcal{H}(\Sigma) = \mathcal{H}(\Sigma, \mathrm{mod}_0(\Sigma))$ auch mit $\mathrm{coh}(\mathbb{X})$ (vgl. [**31**]), wobei $\mathbb{X}$ die Parametermenge ist in der Zerlegung

$$\mathrm{mod}_0(\Sigma) = \coprod_{x \in \mathbb{X}} \mathcal{U}_x,$$

in der $\mathcal{U}_x$ zusammenhängende, einreihige Längenkategorien sind. Wir sagen, daß $\mathbb{X}$, versehen mit der Kategorie $\mathrm{coh}(\mathbb{X})$, eine *exzeptionelle Kurve* ist ([**29**], [**31**]); als Menge steht $\mathbb{X}$ in Bijektion zu den regulären Komponenten eines zahmen Bimoduls.

Für mehr Details der Theorie der exzeptionellen Kurven verweisen wir auf [**31**].

Die Kategorien $\mathrm{mod}(\Sigma)$ und $\mathrm{coh}(\mathbb{X})$ sind deriviert äquivalent:

$$\mathrm{D}^b(\Sigma) \simeq \mathrm{D}^b(\mathbb{X}),$$

insbesondere gilt für die Grothendieck-Gruppen $\mathrm{K}_0(\Sigma) = \mathrm{K}_0(\mathbb{X})$.

Bezeichne mit $\mathrm{coh}_0(\mathbb{X})$ die volle Unterkategorie, die aus den Objekten endlicher Länge besteht, und mit $\mathrm{coh}_+(\mathbb{X})$ die volle Unterkategorie, die aus den torsionsfreien Objekten besteht. Dann gilt $\mathrm{mod}_0(\Sigma) = \mathrm{coh}_0(\mathbb{X})$ und $\mathrm{mod}_+(\Sigma) \subset \mathrm{coh}_+(\mathbb{X})$.

Im folgenden sei $\mathrm{rk} : \mathrm{K}_0(\mathbb{X}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ der Rang, der von der Garbenkategorie $\mathrm{coh}(\mathbb{X})$ herrührt. Für jedes $F \in \mathrm{coh}(\mathbb{X})$, $F$ unzerlegbar, gilt also

$$F \in \mathrm{coh}_+(\mathbb{X}) \iff \mathrm{rk}(F) > 0.$$

Nach Abschnitt A.1 gibt es ein eindeutig bestimmtes $\mathbf{w}$ im Radikal der Grothendieck-Gruppe $\mathrm{K}_0(\mathbb{X})$, welches einen direkten Summanden in $\mathrm{K}_0(\mathbb{X})$ erzeugt, und so, daß rk aus der Linearform $\langle -, \mathbf{w} \rangle$ durch Normieren entsteht. Wir schreiben dann auch $\mathrm{rk} = \mathrm{rk}_{\mathbf{w}}$ (vgl. Abschnitt A.1).

Für jedes $x \in \mathbb{X}$ sei $p(x)$ das *Gewicht* von $x$, also die Anzahl der einfachen Objekte in der einreihigen Kategorie $\mathcal{U}_x$ (der Rang der "Röhre"). Es ist $p(x) = 1$ für fast alle

$x \in \mathbb{X}$, und alle $p(x)$ sind natürliche Zahlen ([**32**, S 8]). Bezeichne mit $x_1, \dots, x_t \in \mathbb{X}$ die Punkte, so daß $p_i := p(x_i) > 1$ gilt $(i = 1, \dots, t)$.

Es gibt ein exzeptionelles Vektorbündel $L$ vom Rang 1, so daß es für $i = 1, \dots, t$ bis auf Isomorphie genau eine exzeptionelle einfache Garbe $S_i$ gibt, die in $x_i$ konzentriert ist, und so, daß $\operatorname{Hom}(L, S_i) \neq 0$ gilt. Wir nennen ein solches Linienbündel $L$ *speziell*, oder genauer *speziell bzgl.* $S_1, \dots, S_t$.

Mit einem speziellen Linienbündel $L$ kann man in $\mathrm{K}_0(\mathbb{X})$ eine $\mathbf{w}$-kanonische Basis (vgl. Anhang A.2.1) konstruieren ([**32**]). Für jedes $x \in \mathbb{X}$ sei (wobei hier $|-|$ für $\dim_k(-)$ steht)

$$e(x) := \frac{|\operatorname{Hom}(L, S_x)|}{|\operatorname{End}(S_x)|}, \;\; f(x) := \frac{1}{\varepsilon} \frac{|\operatorname{Hom}(L, S_x)|}{|\operatorname{End}(L)|}.$$

Es sei $f_i := f(x_i)$, $e_i := e(x_i)$ und $d_i := e_i f_i$ $(i = 1, \dots, t)$. Dann ist $(\mathrm{K}_0(\mathbb{X}), \mathbf{w})$ ein kanonisches Gitter mit Symbol (vgl. A.2.1)

$$\sigma[\mathbb{X}] = \left( \begin{array}{c|c} p_1, \dots, p_t & \\ d_1, \dots, d_t & \varepsilon \\ f_1, \dots, f_t & \end{array} \right).$$

Ist $\mathbf{w_x} = \sum_{j=1}^{p(x)} \tau^j [S_x]$ für jedes $x \in \mathbb{X}$, so gilt $\mathbf{w_x} = f(x)\mathbf{w}$ und $e(x) = f(x) \frac{\varepsilon |\operatorname{End}(L)|}{|\operatorname{End}(S_x)|}$. Insbesondere sind die Zahlen $e(x)$ und $f(x)$ unabhängig von der Auswahl von $L$ (vgl. A.2.10). $f(x)$ heißt der *Index*, $e(x)$ die *Multiplizität* von $x$. Der Punkt $x$ (bzw. das Objekt $S_x$) heißt *rational*, falls $f(x) = 1$, und *multiplizitätenfrei*, falls $e(x) = 1$ gilt.

Nach [**32**, S 9] gibt es eine Rangfunktion auf $\mathrm{K}_0(\mathbb{X})$, die die unzerlegbaren Moduln in $\operatorname{ind}(\Sigma)$ separiert von $\operatorname{mod}_0(\Sigma)$. Mit der Separierungseigenschaft ist diese Rangfunktion nur abhängig von der separierenden tubularen Familie $\operatorname{mod}_0(\Sigma)$:

LEMMA 4.2.2. *Sei* $r : \mathrm{K}_0(\mathbb{X}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ *eine Rangfunktion* (*vgl. Anhang A.1*), *so daß*

$$r([F]) \begin{cases} = 0 & \textit{für alle } F \in \operatorname{mod}_0(\Sigma) \\ > 0 & \textit{für ein } F \in \operatorname{mod}_+(\Sigma). \end{cases}$$

*Dann gilt*

$$r = \operatorname{rk}_{\mathbf{w}}.$$

BEWEIS. Sei $\mathrm{K}_0(\mathbb{X})_0 = \operatorname{Kern} \operatorname{rk}_{\mathbf{w}}$. Sei $\mathbf{w}'$ Erzeuger einer 1-Röhre mit $r = \operatorname{rk}_{\mathbf{w}'}$. Sei $x \in \mathbb{X}$. Es gilt $\mathbf{w_x} = f(x)\mathbf{w}$. Es gibt ein $F \in \operatorname{mod}_0(\Sigma)$ mit $[F] = \mathbf{w_x}$. Es folgt $r(\mathbf{w}) = 0$, also $\langle \mathbf{w}', \mathbf{w} \rangle = 0$, also hat $\mathbf{w}'$ den $\mathbf{w}$-Rang 0. Wegen $\mathrm{K}_0(\mathbb{X})_0 \cap \operatorname{Rad} \mathrm{K}_0(\mathbb{X}) = \mathbb{Z}\mathbf{w}$ (mittels [**32**, S 13] wie in 3.7.2) folgt $\mathbf{w}' = \pm \mathbf{w}$. Aus der Positivitätseigenschaft von $r$ folgt dann $\mathbf{w} = \mathbf{w}'$. □

Die folgende Aussage spiegelt eine Situation wider, die der Faktorialität nahesteht.

PROPOSITION 4.2.3. *Sei* $\mathbb{X}$ *multiplizitätenfrei, d. h. es gelte* $e(x) = 1$ *für alle* $x \in \mathbb{X}$. *Dann gibt es bis auf Verschiebung* ([**32**, S 10]) *nur ein Linienbündel in* $\operatorname{coh}(\mathbb{X})$.

Beweis. Seien $L$ und $L'$ Linienbündel, $L$ speziell. Nach Verschiebung kann man annehmen, daß $L,\ L' \in \mathrm{mod}_+(\Sigma)$ gilt. Nach [**32**, S 15] gilt für $x \in \mathbb{X}$, $n \gg 0$, $\mathrm{Hom}(L, L'(nx)) \neq 0$. Da jedes Linienbündel stabil ist, erhält man eine Folge

$$L = L_0 \xrightarrow{f_1} L_1 \xrightarrow{f_2} L_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_{t-1} \xrightarrow{f_t} L_t = L'(nx),$$

wobei $L_i$ Linienbündel und $f_i$ 1-irreduzible (analog zu Abschnitt 1.3 definiert) Monomorphismen sind. Die Cokerne $S_i$ von $f_i$ sind einfach, konzentriert in $y_i \in \mathbb{X}$. Wegen $e(y_i) = 1$ ist jedes $S_i$ Cokern von einem Monomorphismus $\sigma_{y_i}^{-1} L_i \longrightarrow L_i$, und damit erhält man $[L_{i-1}(y_i)] = [L_i]$, also sind alle $L_i$ exzeptionell und $L_i \simeq L_{i-1}(y_i)$, und daher gehen $L$ und $L'$ durch Verschiebung ineinander über. □

Lemma 4.2.4 ([**23**]). *Seien $E$ und $F$ exzeptionelle Objekte in* $\mathrm{coh}(\mathbb{X})$*. Dann*

$$[E] = [F] \quad \Longrightarrow \quad E \simeq F.$$

Wir geben hier ohne Beweis einen zu [**32**, Prop. 4.2] und Korollar 3.5.6 analogen Satz an (vgl. auch [**31**, Thm. 3.5]).

Proposition 4.2.5 (Reduktion von Gewichten). *Sei $\mathbb{X}$ eine exzeptionelle Kurve mit Ausnahmepunkten $x_1, \ldots, x_t$, Gewichten $p_1, \ldots, p_t$ und exzeptionellen einfachen Objekten $S_1, \ldots, S_t$. Die rechts-perpendikulare Kategorie*

$$\{\tau^j S_i \mid 1 \leq i \leq t,\ -1 \not\equiv j \bmod p_i\}^{\perp}$$

*in* $\mathrm{coh}(\mathbb{X})$ *ist äquivalent zu* $\mathrm{coh}(\mathbb{Y})$ *über einer exzeptionellen Kurve $\mathbb{Y}$, wobei* $\mathrm{coh}(\mathbb{Y}) = \mathcal{H}(\Sigma)$ *gilt, und $\Sigma$ eine zahm-erbliche Bimodulalgebra ist.* □

Lemma 4.2.6. *Es gibt modulo* $\mathrm{Aut}(\mathrm{coh}(\mathbb{X}))$ *höchstens zwei spezielle Linienbündel.*

Beweis. Sei $S_1, \ldots, S_t$ eine feste Auswahl von Einfachen aus jeder Ausnahmeröhre. Sei $L$ ein spezielles Linienbündel. Nach Anwendung von einem geeigneten Automorphismus (vgl. 4.4.1) kann man annehmen, daß $L$ speziell bzgl. $S_1, \ldots, S_t$ ist. Nach entsprechender Reduktion von Gewichten kann man dann annehmen, daß $\mathbb{X}$ homogen ist, und die Aussage ist dann klar. □

Korollar 4.2.7. *Der Typ des Bimoduls aus 4.2.5 ist, bis auf Permutation der Einträge, eine Invariante von* $\mathrm{coh}(\mathbb{X})$*; der Typ ist $(2,2)$, falls $\varepsilon = 1$ gilt, und er ist $(1,4)$ oder $(4,1)$, falls $\varepsilon = 2$ gilt.* □

Wir nennen $\varepsilon$ (bzw. den Typ des unterliegenden Bimoduls) auch den *Typ* von $\mathbb{X}$.

## 4.3. Röhren- und Intervallkategorien

Sei $\Sigma$ eine versteckt-kanonische Algebra, von der wir stets annehmen, daß sie zusammenhängend ist. Sei $\mathrm{mod}_0(\Sigma)$ *eine* separierende tubulare Familie in $\mathrm{mod}(\Sigma)$. Sei $\mathrm{coh}(\mathbb{X})$ die zugehörige Garbenkategorie.

Definition 4.3.1. $\Sigma$ (bzw. $\mathbb{X}$) heißt *tubular*, falls $\delta[\mathrm{K}_0(\mathbb{X})] = 0$ gilt (vgl. [**30**] bzw. Abschnitt A.2).

Eine versteckt-kanonische Algebra ist genau dann tubular, falls das *virtuelle Geschlecht*[1] von $\mathbb{X}$ gleich 1 ist, was genau dann der Fall ist, wenn das Radikal von $\mathrm{K}_0(\mathbb{X})$

[1][**18**]. In [**32**] wird es einfach nur *Geschlecht* genannt.

eine freie abelsche Gruppe vom Rang 2 ist (in den übrigen Fällen ist es vom Rang 1). Diese Bedingungen sind äquivalent dazu, daß $\Sigma$ zahm vom tubularen Typ ist ([**32**, Thm. 7.1]).

Wir nennen eine tubulare versteckt-kanonische Algebra auch kurz *tubulare Algebra*.

*Im Rest dieses Kapitels sei* $\Sigma$ *immer eine tubulare k-Algebra über dem Körper k und* $\mathrm{mod}_0(\Sigma) = \coprod_{x\in\mathbb{X}} \mathcal{U}_x$ *eine separierende tubulare Familie. Sei* $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Sigma, \mathrm{mod}_0(\Sigma)) = \mathrm{coh}(\mathbb{X})$ *die zugehörige Garbenkategorie über der tubularen exzeptionellen Kurve* $\mathbb{X}$.

Für alle $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathrm{K}_0(\mathbb{X})$ sei

$$\langle\!\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle\!\rangle := \sum_{j=0}^{p-1} \langle \tau^j \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle,$$

wobei $p$ das kleinste gemeinsame Vielfache der Gewichte $p_i$ ist. Auf $\mathrm{K}_0(\mathbb{X})$ ist eine *Gradfunktion* definiert durch

$$\deg(\mathbf{x}) = \frac{1}{\kappa\varepsilon} \langle\!\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle\!\rangle$$

für jedes $\mathbf{x} \in \mathrm{K}_0(\mathbb{X})$, wobei $\mathbf{a}$ die Klasse eines speziellen Linienbündels $L$ ist (vgl. [**30**]). Wir können dann einen *Anstieg* $\mu$ durch $\frac{\deg}{\mathrm{rk}}$ definieren. Damit erhält man dann den Begriff der *Stabilität* und *Semistabilität* von Objekten $X \neq 0$ in $\mathcal{H}$ (wegen $X \neq 0$ sind nicht $\deg([X])$ und $\mathrm{rk}([X])$ beide null).

Für jedes $q \in \overline{\mathbb{Q}}$ sei $\mathcal{H}^{(q)}$ die volle Unterkategorie von $\mathcal{H}$, die aus den semistabilen Objekten vom Anstieg $q$ besteht. $\mathcal{H}$ und $\mathcal{H}^{(q)}$ haben folgende Eigenschaften, vgl. [**18**, 5.2+5.6]: $\mathcal{H}^{(q)}$ ist eine exakte abelsche Teilkategorie von $\mathcal{H}$, abgeschlossen gegen Erweiterungen und Auslander-Reiten-Translation, und $\mathcal{H}^{(q)}$ ist eine zusammenhängende, einreihige Längenkategorie. Jedes unzerlegbare Objekt in $\mathcal{H}$ ist semistabil; es gilt

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(\mathcal{H}^{(q)}, \mathcal{H}^{(q')}) \neq 0 \iff q \leq q'.$$

("$\Longrightarrow$" folgt aus der Semistabilität, "$\Longleftarrow$" erhält man leicht mit der Riemann-Roch-Formel [**30**, Thm. 9.2].)

Wir werden später sehen, daß $\mathcal{H}^{(q)} \neq 0$ für jedes $q \in \overline{\mathbb{Q}}$ gilt.

Die (beschränkte) derivierte Kategorie $\mathcal{D} = \mathrm{D}^b(\mathcal{H})$ ist wegen der Erblichkeit von $\mathcal{H}$ gerade die repetitive Kategorie von $\mathcal{H}$:

$$\mathrm{D}^b(\mathcal{H}) = \bigvee_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{H}[n].$$

D. h. $\mathrm{D}^b(\mathcal{H})$ ist der additive Abschluß der Vereinigung der Kopien $\mathcal{H}[n]$, deren Objekte mit $X[n]$ ($X \in \mathcal{H}$) bezeichnet werden, und es gibt keine Morphismen $\neq 0$ von $\mathcal{H}[n]$ nach $\mathcal{H}[m]$, falls $n > m$. Der Funktor $X \mapsto X[1]$ auf $\mathcal{D}$ (und sein Inverses) heißt *Translation*. Jedes unzerlegbare Objekt in $\mathcal{D}$ ist ein Halmkomplex, also von der Form $X[n]$ für ein (unzerlegbares) $X \in \mathcal{H}$ und $n \in \mathbb{Z}$. Für alle $X$, $Y \in \mathcal{H}$ und alle $n$, $m \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X[n], Y[m]) = \begin{cases} 0 & m < n \\ \mathrm{Ext}_{\mathcal{H}}^{m-n}(X, Y) & m \geq n. \end{cases}$$

(Zu derivierten Kategorien vgl. [**20**].)

Sei $X \in \mathcal{D}$ unzerlegbar. Sei $\overline{\mu}X = (\gamma X, \mu X) \in \mathbb{Z} \times \overline{\mathbb{Q}}$, versehen mit der lexikographischen Ordnung; dabei ist $\gamma X$ das Element $n \in \mathbb{Z}$, so daß $X \in \mathcal{H}[n]$, also in der $n$-ten Kopie liegt; $\mu X$ soll dann der Anstieg von $X[-n] \in \mathcal{H}$ sein. Die Semistabilität liest sich mit diesen Bezeichnungen so: Sind $X$, $Y \in \mathcal{D}$ unzerlegbar, so gilt

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X,Y) \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \gamma X = \gamma Y \text{ und } \mu X \leq \mu Y, \text{ oder} \\ \gamma X = \gamma Y - 1 \text{ und } \mu X \geq \mu Y. \end{cases}$$

Für jedes $q \in \overline{\mathbb{Q}}$ sei $\mathcal{H}\langle q \rangle$ die Teilkategorie von $\mathcal{D}$ definiert durch

$$\mathcal{H}\langle q \rangle = \mathcal{H}_{-}^{(q)}[-1] \vee \mathcal{H}_{+}^{(q)} \vee \mathcal{H}^{(q)},$$

wobei

$$\mathcal{H}_{+}^{(q)} = \bigvee_{-\infty < r < q} \mathcal{H}^{(r)}, \quad \mathcal{H}_{-}^{(q)} = \bigvee_{q < r \leq \infty} \mathcal{H}^{(r)}.$$

Die Kategorien $\mathcal{H}^{(q)}[n]$ nennen wir *Röhrenkategorien*, die Kategorien $\mathcal{H}\langle q \rangle[n]$ nennen wir *Intervallkategorien* ($q \in \overline{\mathbb{Q}}$, $n \in \mathbb{Z}$).

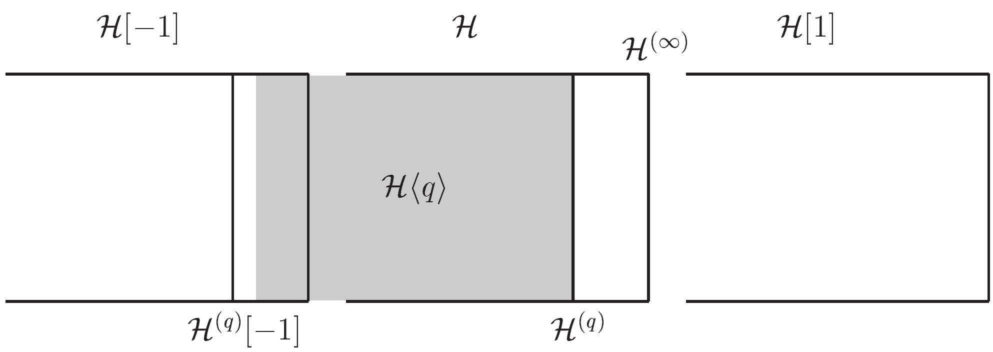


Abbildung 4.2. Die Intervallkategorie $\mathcal{H}\langle q \rangle$

Proposition 4.3.2 (Lenzing [**29**]). *Sei $q \in \overline{\mathbb{Q}}$ und nehme $\mathcal{H}^{(q)} \neq 0$ an. Dann gibt es eine tubulare exzeptionelle Kurve $\mathbb{X}\langle q \rangle$ mit $\mathcal{H}\langle q \rangle = \mathrm{coh}(\mathbb{X}\langle q \rangle)$ und $\mathrm{D}^b(\mathbb{X}\langle q \rangle) = \mathrm{D}^b(\mathbb{X})$. Die Kategorie $\mathcal{H}^{(q)}$ besteht gerade aus den Objekten endlicher Länge in $\mathrm{coh}(\mathbb{X}\langle q \rangle)$.* □

Sei $q \in \overline{\mathbb{Q}}$, sei $\mathbb{Y} = \mathbb{X}\langle q \rangle$. Nehme an, daß $\mathcal{H}^{(q)} \neq 0$ gilt. Es ist

$$\mathcal{H}^{(q)} = \coprod_{y \in \mathbb{Y}} \mathcal{U}_y^{(q)},$$

wobei $\mathcal{U}_y^{(q)}$ zusammenhängende, einreihige Kategorien sind.

Proposition 4.3.3 (Lenzing [**29**]). *Sei $q \in \overline{\mathbb{Q}}$ und nehme $\mathcal{H}^{(q)} \neq 0$ an.*

(1) *Die Röhrenkategorie $\mathcal{H}^{(q)}$ separiert die derivierte Kategorie $\mathcal{D} = \mathrm{D}^b(\mathcal{H})$ (insbesondere die Kategorie $\mathcal{H}$) in drei Teile*

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_{+}^{(q)} \vee \mathcal{H}^{(q)} \vee \mathcal{D}_{-}^{(q)}, \ \textit{bzw.}\ \mathcal{H} = \mathcal{H}_{+}^{(q)} \vee \mathcal{H}^{(q)} \vee \mathcal{H}_{-}^{(q)},$$

*wobei*

$$\mathcal{D}_+^{(q)} = \{X \in \mathcal{D} \mid \operatorname{Hom}(\mathcal{H}^{(q)}, X) = 0\},\ \mathcal{D}_-^{(q)} = \{Y \in \mathcal{D} \mid \operatorname{Hom}(Y, \mathcal{H}^{(q)}) = 0\}$$

*und*

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_+^{(q)} = \mathcal{H} \cap \mathcal{D}_+^{(q)},\ \mathcal{H} = \mathcal{H}_-^{(q)} = \mathcal{H} \cap \mathcal{D}_-^{(q)}.$$

(2) *Sei $y \in \mathbb{Y}$, und sei $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y)$ mit $X \in \mathcal{D}_+^{(q)}$, $Y \in \mathcal{D}_-^{(q)}$. Dann faktorisiert $f$ durch ein Objekt aus $\mathcal{U}_y^{(q)}$.* □

$\mathcal{H}^{(q)} \neq 0$ ist also eine *separierende tubulare Familie* (in $\mathrm{D}^b(\mathcal{H})$, insbesondere in $\mathcal{H}$).

Wir nehmen ein Ergebnis bereits vorweg. Es wird in den nachfolgenden Abschnitten bewiesen (Theorem 7 und Satz 4.6.1).

Satz 4.3.4. *Für jedes $q \in \overline{\mathbb{Q}}$ ist die Röhrenkategorie $\mathcal{H}^{(q)} \neq 0$; folglich ist sie eine separierende tubulare Familie in $\mathrm{D}^b(\mathcal{H})$.*

Lemma 4.3.5 (Intervall-Lemma). *Sei $\sigma \in \operatorname{Aut} \mathrm{D}^b(\mathcal{H})$. Sei $q \in \overline{\mathbb{Q}}$. Dann gibt es $q' \in \overline{\mathbb{Q}}$ und $n \in \mathbb{Z}$, so daß $\sigma(\mathcal{H}^{(q)}) = \mathcal{H}^{(q')}[n]$ und $\sigma(\mathcal{H}\langle q\rangle) = \mathcal{H}\langle q'\rangle[n]$.*

Beweis. Sei $\mathcal{D} = \mathrm{D}^b(\mathcal{H})$. Seien $X$, $Y \in \mathcal{D}$ unzerlegbar.

Da $\sigma$ mit der Auslander-Reiten-Translation vertauscht, bewahrt $\sigma$ die einzelnen Röhren, und wegen 4.3.4 sowie der Faktorisierungseigenschaft in 4.3.3 folgt dann $\overline{\mu}\sigma X = \overline{\mu}\sigma Y$, wenn $\overline{\mu} X = \overline{\mu} Y$:

Denn sei etwa $\overline{\mu}\sigma Y < \overline{\mu}\sigma X$. Wähle $Z_1$, $Z_2 \in \mathcal{D}$ unzerlegbar mit $\overline{\mu}\sigma Y < \overline{\mu} Z_1 < \overline{\mu}\sigma X < \overline{\mu} Z_2 =: b$, $\mu Z_1$, $\mu Z_2 \neq \mu\sigma X$, und zwar so, daß $Z_1 \in \mathcal{H}\langle b\rangle$. Es gibt dann ein $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(Z_1, Z_2)$, $f \neq 0$. Es ist $Z_1 = \sigma Z_1'$, $Z_2 = \sigma Z_2'$, $f = \sigma f'$. $f$ faktorisiert durch die Röhre, die $\sigma X$ enthält. Es folgt $\overline{\mu} Z_1' < \overline{\mu} X = \overline{\mu} Y < \overline{\mu} Z_2'$, also faktorisiert $f'$ durch die Röhre, die $Y$ enthält, also faktorisiert $f$ durch die Röhre, die $\sigma Y$ enthält. Insbesondere $\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(Z_1, \sigma Y) \neq 0$, was aber wegen $\overline{\mu}\sigma Y < \overline{\mu} Z_1$ nicht geht.

Ist also $Z \in \mathcal{H}^{(q)}$ unzerlegbar, so ist $(n, q') := \overline{\mu}\sigma Z$ wohldefiniert. Ist $X \in \mathcal{H}\langle q\rangle$ unzerlegbar, $X \notin \mathcal{H}^{(q)}$, so gibt es immer nicht-triviale Morphismen von $X$ nach $\mathcal{H}^{(q)}$, und daher folgt $\sigma X \in \mathcal{H}\langle q'\rangle[n]$ oder $\sigma X \in \mathcal{H}^{(q')}[n+1]$. Im letzten Fall müßten aber alle $Y \in \mathcal{H}\langle q\rangle$ mit kleinerem Anstieg als $X$ durch $\sigma$ auch nach $\mathcal{H}^{(q')}[n+1]$ abgebildet werden. Das ergibt aber nach dem ersten Beweisteil einen Widerspruch. Es folgt $\sigma(\mathcal{H}\langle q\rangle) \subset \mathcal{H}\langle q'\rangle[n]$. Wegen $\mathrm{D}^b(\sigma(\mathcal{H}\langle q\rangle)) = \mathrm{D}^b(\mathcal{H}\langle q'\rangle[n])$ folgt dann auch die Gleichheit. □

Bemerkung 4.3.6. Die Definition des Anstiegs $\mu$ ist abhängig von der Wahl der Rangfunktion auf $\mathrm{K}_0(\mathbb{X})$ und von der Auswahl eines speziellen Linienbündels (bzgl. dieser Rangfunktion). Es ist aber leicht zu sehen, daß die Menge der $\mathcal{H}^{(q)}[n]$ ($q \in \overline{\mathbb{Q}}$, $n \in \mathbb{Z}$) bzw. die Menge der Intervallkategorien davon unabhängig ist. Insbesondere ist die Anzahl der Bahnen, mit denen $\operatorname{Aut} \mathrm{D}^b(\mathcal{H})$ auf diesen Mengen operiert, invariant.

## 4.4. Mutationen an Röhren

Wir behalten die Begriffe und Voraussetzungen des vorherigen Abschnitts bei.

Nach 4.3.2 gibt es eine kanonische Algebra $\Lambda\langle q\rangle$ mit $\mathcal{H}\langle q\rangle = \mathcal{H}(\Lambda\langle q\rangle, \operatorname{mod}_0(\Lambda\langle q\rangle))$, wobei $\operatorname{mod}_0(\Lambda\langle q\rangle)$ die zentrale separierende tubulare Familie über $\Lambda\langle q\rangle$ ist, die aus den Moduln vom Rang null besteht. Es ist dann $\mathcal{H}^{(q)} = \mathrm{coh}_0(\mathbb{Y})$, die Kategorie der Garben endlicher Länge über $\mathbb{Y} = \mathbb{X}\langle q\rangle$, bzw. $\mathcal{H}^{(q)} = \mathrm{mod}_0(\Lambda\langle q\rangle)$.

Wir fixieren eine Röhre. Sei also $y \in \mathbb{Y}$. Dann sei $\mathcal{H}_y^{(q)}$ die volle Teilkategorie in $\mathrm{mod}_{\geq}(\Lambda\langle q\rangle)$, die aus den Objekten $M$ besteht mit $\mathrm{Hom}(\mathcal{U}_y^{(q)}, M) = 0$. Ferner sei $S_y$ ein einfaches Objekt in $\mathcal{U}_y^{(q)}$ und $\mathcal{S}_y$ der additive Abschluß der Auslander-Reiten-Bahn $\tau^j S_y$ $(1 \leq j \leq p(y))$.

Sei $M \in \mathcal{H}_y^{(q)}$. Sei

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow M(y) \longrightarrow M_y \longrightarrow 0$$

eine $\mathcal{S}_y$-universelle Erweiterung. Die Zuordnung $M \mapsto M(y)$ ist funktoriell (vgl. [**32**, S 10]).

Proposition 4.4.1 (Lenzing/de la Peña [**32**, S 10]). *Mit obigen Bezeichnungen und Voraussetzungen gilt:*

(1) *Es gibt eine Äquivalenz von triangulierten Kategorien*

$$\sigma_y : \mathrm{D}^b(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathrm{D}^b(\mathcal{H})$$

*mit* $\sigma_y(M) = M(y)$ *für jedes* $M \in \mathcal{H}_y^{(q)}$, *und* $\sigma_y$ *läßt sich einschränken zu einer rangbewahrenden Äquivalenz* $\mathcal{H}\langle q\rangle \longrightarrow \mathcal{H}\langle q\rangle$.

(2) $\sigma_y$ *induziert einen Automorphismus* $\overline{\sigma}_y : \mathrm{K}_0(\mathbb{X}) \longrightarrow \mathrm{K}_0(\mathbb{X})$, *der durch*

$$\overline{\sigma}_y(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \sum_{j=0}^{p(y)-1} \frac{\langle [\tau^j S_y], \mathbf{x}\rangle}{|\operatorname{End}(S_y)|}[\tau^j S_y]$$

*gegeben ist.* □

Im folgenden sei $T$ das Kippbündel in $\mathrm{mod}_+(\Sigma)$ (die "kanonische Konfiguration" wie in [**32**, Prop. 5.4]):

(4.4.1)
$$\begin{tikzcd}
 & L_1(1) \arrow[r] & L_1(2) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & L_1(p_1-2) \arrow[r] & L_1(p_1-1) \arrow[dr] & \\
L \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[ddr] & L_2(1) \arrow[r] & L_2(2) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & L_2(p_2-2) \arrow[r] & L_2(p_2-1) \arrow[r] & \overline{L} \\
 & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
 & L_t(1) \arrow[r] & L_t(2) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & L_t(p_t-2) \arrow[r] & L_t(p_t-1) \arrow[uur] &
\end{tikzcd}$$

## 4.5. Klassifikation der unzerlegbaren Garben

Wir behalten die Begriffe und Voraussetzungen der vorherigen Abschnitte bei.

In diesem Abschnitt nehmen wir an, daß das Symbol von $\mathbb{X}$ *nicht* äquivalent ist zu $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ bzw. $\left(\begin{array}{c|c} 2 & \\ 2 & 2 \\ 2 & \end{array}\right)$. *Anstiegsklassen* in $\overline{\mathbb{Q}}$ werden in Definition A.3.4 eingeführt. Es handelt sich um die Bahnen der auf $\overline{\mathbb{Q}}$ induzierten Operation von $\mathrm{Aut}(\mathrm{K}_0(\mathbb{X}))$. In Abschnitt A.5 wird gezeigt, daß es höchstens zwei Anstiegsklassen gibt (siehe Tabelle A.1 auf Seite 84).

Das folgende Theorem ist die präzisere Fassung von Theorem 6.

THEOREM 7. (1) *Für alle* $q \in \overline{\mathbb{Q}}$ *gilt* $\mathcal{H}^{(q)} \neq 0$.

(2) *Für alle* $q,\ q' \in \overline{\mathbb{Q}}$, *die in derselben Anstiegsklasse liegen, gibt es Äquivalenzen (von triangulierten Kategorien)*

$$\Phi_{q',q} : \mathrm{D}^b(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathrm{D}^b(\mathcal{H})$$

*mit*

$$\Phi_{q',q}(\mathcal{H}^{(q)}) = \mathcal{H}^{(q')}$$

*und*

$$\Phi_{q',q}(\mathcal{H}\langle q\rangle) = \mathcal{H}\langle q'\rangle,$$

*so daß für jedes* $q'' \in \overline{\mathbb{Q}}$, *welches auch in der Anstiegsklasse liegt, gilt*

$$\Phi_{q',q} = \Phi_{q',q''} \circ \Phi_{q'',q} \quad \textit{und} \quad \Phi_{q,q} = \mathbf{1}.$$

(3) *Für alle* $q,\ q' \in \overline{\mathbb{Q}}$ *in einer Anstiegsklasse gibt es Rangisomorphismen von bilinearen Gittern*

$$\varphi_{q',q} : (\mathrm{K}_0(\mathbb{X}), \mathbf{w_q}) \longrightarrow (\mathrm{K}_0(\mathbb{X}), \mathbf{w_{q'}})$$

(*vgl. A.1 und A.3*), *so daß*

$$[\Phi_{q',q}(F)] = \varphi_{q',q}([F]) \quad \textit{für alle } F \in \mathcal{H}.$$

(4) *Liegen* $q$ *und* $q'$ *in verschiedenen Anstiegsklassen, so sind die Röhrenkategorien* $\mathcal{H}^{(q)}$ *und* $\mathcal{H}^{(q')}$ nicht *äquivalent; insbesondere gibt es* kein $\Phi \in \operatorname{Aut}\mathrm{D}^b(\mathcal{H})$ *mit* $\Phi(\mathcal{H}^{(q)}) = \mathcal{H}^{(q')}$ *oder mit* $\Phi(\mathcal{H}\langle q\rangle) = \mathcal{H}\langle q'\rangle$.

BEWEIS. (1), (2) Der Beweis ist eine Folgerung aus 4.4.1 und der Klassifizierung der tubularen Symbole (siehe Abschnitt A.5). Wir nehmen zunächst an, daß es mindestens zwei Ausnahmeröhren gibt. Dann gibt es, wie ein Blick auf die Tabelle A.1 auf Seite 84 bestätigt, eine Untergruppe $U$ von $\operatorname{Aut}(\mathrm{K}_0(\mathbb{X}))$, die transitiv auf den Anstiegsklassen operiert und von zwei Elementen erzeugt wird, nämlich von Verschiebungsautomorphismen bzgl. $\mathbf{a}$ und einem $\mathbf{s_i}$. Diese Elemente sind aber Klassen von exzeptionellen Objekten in $\mathrm{coh}(\mathbb{X})$, und zwar $\mathbf{a} = [L]$ und $\mathbf{s_i} = [S_i]$. Die durch Mutationen an den Röhren dieser Objekte und der Translation erzeugte Untergruppe von $\operatorname{Aut}\mathrm{D}^b(\mathbb{X})$ induziert also eine Operation auf der Menge der $\mathcal{H}^{(q)}$ ($q \in \overline{\mathbb{Q}}$), die transitiv auf den durch die Anstiegsklassen induzierten Teilmengen wirkt. Für jede Anstiegsklasse gibt es einen Repräsentanten $q$, so daß $\mathcal{H}^{(q)} \neq 0$, nämlich $0$ (wegen $L \in \mathcal{H}^{(0)}$) für die eine Anstiegsklasse und $\infty$ (wegen $S_i \in \mathcal{H}^{(\infty)}$) für die andere. Es folgt damit $\mathcal{H}^{(q)} \neq 0$ für jedes $q \in \overline{\mathbb{Q}}$.

Sei nun $A$ eine Anstiegsklasse, und $a \in A$ ein Repräsentant. Für jedes $q \in A$ sei $\Psi_q : \mathrm{D}^b(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathrm{D}^b(\mathcal{H})$ eine Komposition von Mutationen (und Translationen), die $\mathcal{H}^{(a)}$ in $\mathcal{H}^{(q)}$ überführt. Seien $q,\ q' \in A$. Dann setze $\Phi_{q',q} = \Psi_{q'} \circ \Psi_q^{-1}$. Offenbar erfüllen die $\Phi_{q',q}$ die gewünschten Eigenschaften.

Nehmen wir zum Schluß an, daß wir in einem der Fälle sind, wo es nur eine Ausnahmeröhre gibt. Dann gibt es eine Untergruppe $U$ von $\operatorname{Aut}(\mathrm{K}_0(\mathbb{X}))$, die transitiv auf den Anstiegsklassen operiert und von drei Elementen erzeugt wird, wie Tabelle A.1 zeigt. Im Fall $\mathbf{p} = (3)$ wird diese Untergruppe erzeugt von Verschiebungsautomorphismen bzgl. $\mathbf{a} = [L]$, $\mathbf{s_1} = [S_1]$ und $\mathbf{a}+\mathbf{w} = [\overline{L}]$. In den Fällen mit $\mathbf{p} = (2)$ hat man außer $\mathbf{a} = [L]$ noch Erzeuger der Form $\mathbf{w_q}$. Diese sind aber nach 4.5.2 (s. u.) realisierbar als Klassen unzerlegbarer, homogener, multiplizitätenfreier Objekte in $\mathrm{coh}(\mathbb{X})$

(beachte, daß wir die Fälle $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ bzw. $\left(\begin{array}{c|c} 2 & \\ 2 & 2 \\ 2 & \end{array}\right)$ ausgeschlossen hatten). Betrachtet man nun die Mutationen an den von diesen Objekten erzeugten Röhren, so folgt die Behauptung genau wie oben.

(3) Ist klar.

(4) folgt aus der Tatsache, daß einerseits eine Äquivalenz mit der Auslander-Reiten-Translation verträglich ist und exzeptionell einfache Garben in ebensolche überführt, und weil andererseits die entsprechenden äquivalenten tubularen Symbole unterschiedliche Listen der Dimensionen der Endomorphismenringe der exzeptionell einfachen Garben liefern (vgl. Tabelle A.1, 3. Spalte). □

LEMMA 4.5.1. *Nehme an, daß das Symbol* $\sigma[\mathbb{X}]$ *von* $(\mathrm{K}_0(\mathbb{X}), \mathbf{w})$ *eines der drei Symbole*

$$\left(\begin{array}{c|c} 2 & \\ 2 & 2 \\ 2 & \end{array}\right), \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

*ist. Dann gibt es einen homogenen rationalen Punkt* $x_0 \in \mathbb{X}$*, der multiplizitätenfrei ist.*

BEWEIS. Nach [**32**, Prop. 4.2] gibt es immer einen rationalen Punkt $x_0 \in \mathbb{X}$. Da der einzige exzeptionelle Punkt $x_1$ wegen $f_1 > 1$ selbst nicht rational ist, ist $x_0$ homogen. Sei $S$ das zugehörige einfache Objekt. Dann gilt $[S] = \mathbf{w}$, und es gibt ein $d \in \mathbb{N}$ mit $|\operatorname{End} S| = \varepsilon \cdot d$. Es folgt

$$e(x_0) = \frac{\kappa\varepsilon}{d\varepsilon} = \frac{1}{d} = 1.$$

□

KOROLLAR 4.5.2. *Sei* $\mathbb{X}$ *eine tubulare exzeptionelle Kurve und* $\mathbf{w_q}$ *Erzeuger einer* 1*-Röhre in* $\mathrm{K}_0(\mathbb{X})$*, so daß das q-Symbol eines der drei Symbole aus dem Lemma ist. Dann gibt es ein homogenes, unzerlegbares und multiplizitätenfreies* $S_q \in \operatorname{coh}(\mathbb{X})$ *mit* $[S_q] = \mathbf{w_q}$. □

BEMERKUNG 4.5.3. Meint "Isomorphie" Äquivalenz von Kategorien (bzw. eine von $\operatorname{Aut}(\mathrm{D}^b(\mathbb{X}))$ induzierte Äquivalenz), so ist die Anzahl der Isomorphieklassen der separierenden tubularen Familien in $\operatorname{coh}(\mathbb{X})$ (bzw. in $\mathrm{D}^b(\mathbb{X})$, bzw. der Intervallkategorien in $\mathrm{D}^b(\mathbb{X})$) gleich der Anzahl der Anstiegsklassen in $\overline{\mathbb{Q}}$ bzgl. $\mathrm{K}_0(\mathbb{X})$. Diese Anzahl ist in Tabelle A.1 abzulesen (beachte, daß wir in diesem Abschnitt die erste Zeile der Tabelle ausgeschlossen haben). Die Anstiegsklassen selbst findet man für jeden einzelnen Fall in Abschnitt A.5. Insbesondere sind die Anstiegsklassen sowie deren Anzahl unabhängig vom Grundkörper $k$.

BEISPIEL 4.5.4. Sei $\mathbb{R}$ der Körper der reellen Zahlen, und sei

$$R = \mathbb{R}[X, Y, Z]/(X^4 + Y^4 + Z^2).$$

$R$ ist $H$-graduiert (wobei $H$ erzeugt wird von $\vec{x} = \operatorname{grad} X$, $\vec{y} = \operatorname{grad} Y$, $\vec{z} = \operatorname{grad} Z$ mit Relationen $2\vec{x} = 2\vec{y} = \vec{z}$, also $H = \mathbb{L}(2,2)$) und entsteht aus $\mathbb{R}[X, Y, Z]/(X^2 + Y^2 + Z^2) = \mathbb{R}[x, y, z]$ durch Einfügung des Gewichts 2 in $x$ und $y$. $R$ ist graduiert faktoriell. Sei $\mathbb{X}$ das graduierte projektive Spektrum von $R$. Die Grothendieck-Gruppe $\mathrm{K}_0(\mathbb{X})$ von $\mathcal{H} := \mathrm{coh}^H(\mathbb{X})$ hat die kanonische Basis

$$B_{\mathbf{w}}: \qquad \mathbf{a} = [\mathcal{O}] \;\mid\; \mathbf{s_1} = [\mathcal{S}_1] \;\mid\; \mathbf{s_2} = [\mathcal{S}_2] \;\mid\; \mathbf{w} = [\mathcal{S}]$$

(wobei $\mathcal{S}$ einfach konzentriert ist im homogenen Punkt $z$, $\mathcal{S}_1$ (bzw. $\mathcal{S}_2$) einfach konzentriert ist im exzeptionellen Punkt $x$ (bzw. $y$)), und sie liefert mit A.2.1 das Symbol $(2\ 2 \mid 2)$. Sei

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^2 \longrightarrow \mathcal{L}_i \longrightarrow \mathcal{S}_i \longrightarrow 0$$

die $\mathcal{O}$-couniverselle Erweiterung von $\mathcal{S}_i$ $(i = 1, 2)$ und

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^2 \longrightarrow \overline{\mathcal{L}} \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow 0$$

die $\mathcal{O}$-couniverselle Erweiterung von $\mathcal{S}$. Dann bildet die volle Unterkategorie

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{L}_1 \arrow[dr] & \\
\mathcal{O} \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dr] & & \overline{\mathcal{L}} \\
 & \mathcal{L}_2 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

ein Kippbündel in $\mathcal{H}$. Dessen Endomorphismenring ist die kanonische Algebra

(4.5.1)
$$\Lambda = \quad \begin{tikzcd}
 & \mathbb{C} \arrow[dr, "\mathbb{H}"] & \\
\mathbb{R} \arrow[ur, "\mathbb{C}"] \arrow[rr, "\mathbb{H}"] \arrow[dr, "\mathbb{C}'"'] & & \mathbb{H}. \\
 & \mathbb{C}' \arrow[ur, "\mathbb{H}"'] &
\end{tikzcd}$$

Hierbei ist $\mathbb{H}$ der Quaternionenschiefkörper über $\mathbb{R}$ mit Basis $\mathbf{1}$, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k} = \mathbf{ij}$; es sei $\mathbb{C} = \mathbb{R}\mathbf{1} \oplus \mathbb{R}\mathbf{i}$ und $\mathbb{C}' = \mathbb{R}\mathbf{1} \oplus \mathbb{R}\mathbf{j}$. Das Ideal der Relationen wird erzeugt von

$$u_1 \otimes u_1 - u_2 \otimes u_2,$$

wobei $u_1$ die zu $\mathbf{1}$ im "oberen Pfad", $u_2$ die zu $\mathbf{1}$ im "unteren Pfad" gehörigen Elemente in der Tensoralgebra bezeichnet (vgl. (3.8.3)).

Es gilt $\mathcal{H}(\Lambda, \mathcal{H}^{(\infty)}) = \mathrm{coh}^H(\mathbb{X})$.

Wir betrachten nun Anstieg 0. Es gilt $\mathcal{O} \in \mathcal{H}^{(0)}$. Nach 4.3.3 ist $\mathcal{H}^{(0)}$ eine separierende tubulare Familie in $\mathrm{D}^b(\mathcal{H})$, und deren Röhren liefern eine kanonische Basis in $\mathrm{K}_0(\mathbb{X})$:

$$\mathbf{a^{(0)}} \mid \mathbf{s_1^{(0)}} \mid \mathbf{s_2^{(0)}} \mid \mathbf{w^{(0)}},$$

wobei $\mathbf{w^{(0)}}$ ein Element in $\mathrm{Rad}\,\mathrm{K}_0(\mathbb{X})$ vom Anstieg 0 ist. Andererseits ist nach A.5.12

$$B_0: \qquad -\mathbf{s_2} \mid \tau\mathbf{a} \mid 2\tau\mathbf{a} - 2\tau\mathbf{s_1} + \mathbf{w} \mid \mathbf{a} + \tau\mathbf{a}$$

eine kanonische Basis mit $\mathbf{w^{(0)}} = \mathbf{a} + \tau\mathbf{a}$, die wegen der Invarianz des tubularen Symbols (vgl. A.2.6) dasselbe Symbol liefert, nämlich $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Es gibt ein Kippbündel in $\mathcal{H}\langle 0\rangle$, mit einem Summanden vom 0-Rang 1, und mit Endomorphismenring $\Sigma$, der eine tubulare kanonische Algebra ist, so daß $\mathcal{H}^{(0)}$ die zentrale separierende tubulare Familie in $\operatorname{mod}(\Sigma)$ ist (dieses Kippbündel wird mittels couniverseller Erweiterungen an einem speziellen Bündel vom 0-Rang 1 genau wie obiges Kippbündel in $\operatorname{coh}^H(\mathbb{X})$ konstruiert, vgl. [**32**]). Es muß einfache reguläre Darstellungen $S_1^{(0)}$ und $S_2^{(0)}$ über dem unterliegenden Bimodul geben, so daß deren korrespondierende Punkte $y_1$ und $y_2$ die Symboldaten $f(y_1) = 1$, $d(y_1) = 2$ und $f(y_2) = 2$, $d(y_2) = 2$ haben. Vergleich mit der Tabelle C.1 von Dlab-Ringel zeigt (oder es ergibt sich auch aus dem Symbol), daß der $\Sigma$ zugehörige Bimodul ${}_{\mathbb{C}}\mathbb{C}_{\mathbb{C}} \oplus_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{\overline{\mathbb{C}}}$ sein muß. Weiter gilt $\operatorname{End}_\Sigma(S_1) = \mathbb{R}$ und $\operatorname{End}_\Sigma(S_2) = \mathbb{H}$. Also ist die zu $\Sigma$ gehörige Spezies von der Gestalt

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{R} \arrow[dr, "\mathbb{C}"] & \\
\mathbb{C} \arrow[ur, "\mathbb{C}"] \arrow[rr, "\mathbb{C}\oplus\overline{\mathbb{C}}"] \arrow[dr, "\mathbb{H}"'] & & \mathbb{C} \\
& \mathbb{H} \arrow[ur, "\mathbb{H}"'] &
\end{tikzcd}$$

(dies folgt aus der Konstruktion des Kippbündels; die Endomorphismenringe der "mittleren" Summanden stimmen mit denen der entsprechenden einfachen überein). Die folgenden, teilweise zusammenfassenden Aussagen sind dann leicht zu verifizieren:

- $\Lambda$ und $\Sigma$ sind deriviert-äquivalent. $\Lambda$ ist versteckt-kanonisch vom Typ $\Sigma$, und $\Sigma$ ist versteckt-kanonisch vom Typ $\Lambda$.
- $\Lambda$ und $\Sigma$ sind beide als Kippbündel in $\operatorname{coh}^H(\mathbb{X})$ realisierbar.
- Die jeweils zentralen separierenden tubularen Familien $\mathcal{H}^{(\infty)} = \operatorname{mod}_0(\Lambda)$ und $\mathcal{H}^{(0)} = \operatorname{mod}_0(\Sigma)$ sind *nicht* äquivalent als Kategorien. Insbesondere gibt es *keinen* Automorphismus von $\mathrm{D}^b(\mathcal{H})$, der $\mathcal{H}^{(\infty)}$ auf $\mathcal{H}^{(0)}$ abbildet.
- Die zugehörigen erblichen Kategorien $\mathcal{H}(\Lambda, \mathcal{H}^{(\infty)})$ und $\mathcal{H}(\Sigma, \mathcal{H}^{(0)})$ sind *nicht* äquivalent.
- Die Algebren $\Lambda$ und $\Sigma$ sind *nicht* isomorph.
- Der unterliegende Bimodul von $\Lambda$ ist vom Typ $(4, 1)$, der von $\Sigma$ vom Typ $(2, 2)$.

Weitere Beispiele ergeben sich aus 4.7.2 und 4.7.3.

Das folgende Beispiel wurde uns von C. M. Ringel mitgeteilt. In diesem Beispiel wird über der kanonischen $\mathbb{R}$-Algebra $\Lambda$ ein Kippmodul in $\operatorname{mod}(\Lambda)$ konstruiert, der $\Sigma$ als Endomorphismenring hat.

BEISPIEL 4.5.5 (Ringel). Wir notieren $\Lambda$ in Matrixschreibweise (vgl. [**40**]), und arbeiten mit der dualen Algebra:

$$\begin{pmatrix} \mathbb{H} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbb{H} & \mathbb{C} & 0 & 0 \\ \mathbb{H} & 0 & \mathbb{C}' & 0 \\ \mathbb{H} & \mathbb{C} & \mathbb{C}' & \mathbb{R} \end{pmatrix}$$

Seien $T_1 = (\mathbb{H}, \mathbb{C}, 0, 0)$, $T_2 = (\mathbb{H}, \mathbb{H}, 0, 0)$, $T_3 = (\mathbb{H}, \mathbb{C}, \mathbb{C}', \mathbb{R})$, $T_4 = (\mathbb{H}, \mathbb{H}, \mathbb{C}', \mathbb{C}')$ Rechtsmoduln. Dann ist $T = T_1 \oplus T_2 \oplus T_3 \oplus T_4$ ein Kippmodul in $\operatorname{mod}(\Lambda)$,

$$\begin{tikzcd} & T_3 \arrow[dr] & \\ T_1 \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dr] & & T_4, \\ & T_2 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

und es gilt $\operatorname{End}(T) = \Sigma$:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[dr, "\mathbb{C}'"] & \\ \mathbb{C} \arrow[ur, "\mathbb{C}"] \arrow[rr, "{}_{\mathbb{C}}\mathbb{H}_{\mathbb{C}'}"] \arrow[dr, "\mathbb{H}"'] & & \mathbb{C}'. \\ & \mathbb{H} \arrow[ur, "\mathbb{H}"'] & \end{tikzcd}$$

Es ist ${}_{\mathbb{C}}\mathbb{H}_{\mathbb{C}'}$ von der Form $\mathbb{C} \oplus \overline{\mathbb{C}}$.

## 4.6. Der Ausnahmefall

In diesem Abschnitt nehmen wir stets an, daß das Symbol der tubularen exzeptionellen Kurve $\mathbb{X}$ äquivalent ist zu $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ bzw. $\left(\begin{array}{c|c} 2 & \\ 2 & 2 \\ 2 & \end{array}\right)$.

Der Beweis von Theorem 7, daß es höchstens zwei Isomorphieklassen von Intervallkategorien gibt in $\mathrm{D}^b(\mathbb{X})$, ist in diesem Fall so nicht möglich. Zwar gibt es auch in diesen Fällen genau zwei Anstiegsklassen (d. h. K-theoretisch). Tabelle A.1, 4. Spalte, listet Erzeuger einer Untergruppe $U \subset \operatorname{Aut}(\mathrm{K}_0(\mathbb{X}))$ auf, die auf $\overline{\mathbb{Q}}$ mit zwei Bahnen operiert. Unklar ist aber, inwieweit sich diese Erzeuger als Klassen von Objekten aus $\operatorname{coh}(\mathbb{X})$ realisieren lassen; man möchte ja einen Automorphismus auf $\mathrm{D}^b(\mathbb{X})$ als Mutation an der durch den AR-Orbit eines solchen Objektes definieren. Z. B. ist einer der Erzeuger im Fall $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ das Radikalelement $\mathbf{w}$. Es müßte realisiert werden durch eine homogene, einfache Garbe $S \in \operatorname{coh}_0(\mathbb{X})$, die einem rationalen Punkt $x$ zugeordnet ist. Damit der Verschiebungsautomorphismus $\overline{\sigma}_x$ auf $\mathrm{K}_0(\mathbb{X})$, der induziert wird durch die von $S$ definierte Mutation (Proposition 4.4.1), übereinstimmt mit dem Automorphismus $\sigma_0$ auf $\mathrm{K}_0(\mathbb{X})$, der durch $\mathbf{w}$ definiert wird (Abschnitt A.4), ist es notwendig, daß der Punkt $x$ auch multiplizitätenfrei ist. Die Existenz solcher Punkte ist aber nicht immer bekannt.

Wir werden dieses Problem hier nicht vollständig lösen. Wir können aber zeigen, daß die Anzahl der Bahnen der Intervallkategorien höchstens drei sein kann. Außerdem zeigen wir, daß jedes $\mathcal{H}^{(q)}$ $(q \in \overline{\mathbb{Q}})$ nicht-trivial ist. Am Schluß dieses Abschnitts gehen wir noch auf Bedingungen ein, die dazu führen, daß es genau zwei Bahnen von Intervallkategorien gibt. Es muß offen bleiben, ob drei Bahnen tatsächlich auftreten können.

Satz 4.6.1. *Es gilt* $\mathcal{H}^{(q)} \neq 0$ *für alle* $q \in \overline{\mathbb{Q}}$, *und die Automorphismengruppe von* $\mathrm{D}^b(\mathcal{H})$ *operiert auf der Menge der Intervallkategorien* $\mathcal{H}\langle q\rangle[n]$ $(q \in \overline{\mathbb{Q}},\ n \in \mathbb{Z})$ *mit mindestens zwei und höchstens drei Bahnen.*

Beweis. (1) Sei $\sigma[\mathbb{X}] = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Die Verschiebungsautomorphismen $\sigma_L$, $\sigma_{\overline{L}}$ und $\sigma_{S_1}$ an den von $L$, $\overline{L}$ bzw. $S_1$ aufgespannten Röhren (aus der "kanonischen Konfiguration" (4.4.1)) operieren mit 3 Bahnen, wofür die Intervallkategorien mit zugehörigen Teilkategorien der Objekte endlicher Länge $\mathcal{H}^{(0)}, \mathcal{H}^{(2)}, \mathcal{H}^{(\infty)} \neq 0$ Repräsentanten sind (es gilt $L \in \mathcal{H}^{(0)}$, $\overline{L} \in \mathcal{H}^{(2)}$ und $S_1 \in \mathcal{H}^{(\infty)}$; $\sigma_L$, $\sigma_{\overline{L}}$ und $\sigma_{S_1}$ liefern auf Anstiegsniveau die Abbildungen $q \mapsto \frac{q}{1-q}$, $q \mapsto \frac{-q+4}{-q+3}$ und $q \mapsto q+4$; erste und letzte liefern 4 Anstiegsklassen $A_i$ $(i = 0,1,2,3)$ ("Zähler $= i \bmod 4$"), und die mittlere Abbildung verbindet $A_1$ mit $A_3$).

(2) Sei $\sigma[\mathbb{X}] = \left(\begin{array}{c|c} 2 & \\ 2 & 2 \\ 2 & \end{array}\right)$. Die Verschiebungsautomorphismen $\sigma_L$ und $\sigma_{S_1}$ an den von $L$ bzw. $S_1$ aufgespannten Röhren operieren mit 3 Bahnen, wofür die Intervallkategorien mit zugehörigen Teilkategorien der Objekte endlicher Länge $\mathcal{H}^{(0)}$, $\mathcal{H}^{(1)}$, $\mathcal{H}^{(\infty)} \neq 0$ Repräsentanten sind (es gilt $L \in \mathcal{H}^{(0)}$, $L_1(1) \in \mathcal{H}^{(1)}$ und $S_1 \in \mathcal{H}^{(\infty)}$; $\sigma_L$ und $\sigma_{S_1}$ liefern auf Anstiegsniveau die Abbildungen $q \mapsto \frac{q}{1-2q}$ und $q \mapsto q+2$). $\square$

Möchte man die Anzahl der Bahnen weiter reduzieren, so hat man Verschiebungsautomorphismen an 1-Röhren zu betrachten:

Lemma 4.6.2. *Sei* $U$ *eine Untergruppe von* $\operatorname{Aut} \mathrm{D}^b(\mathcal{H})$, *die erzeugt wird von Verschiebungsautomorphismen an allen exzeptionellen Röhren aus Röhrenfamilien* $\mathcal{H}^{(q_1)}, \ldots, \mathcal{H}^{(q_r)}$. *Es gelte, daß diese Röhrenfamilien ein Repräsentantensystem für die Bahnen bilden, die durch die Operation von* $U$ *auf der Menge aller Röhrenfamilien (bis auf Translation) entstehen. Dann gilt: Die Untergruppe von* $\operatorname{Aut} \mathrm{D}^b(\mathcal{H})$, *die von* allen *Verschiebungsautomorphismen an exzeptionellen Röhren in* allen *Röhrenfamilien erzeugt wird, operiert mit denselben Bahnen.*

Beweis. $E$ sei exzeptionell, einfach in $\mathcal{H}^{(q)}$. Nehme an, daß $\mathcal{H}^{(q)}$ in derselben $U$-Bahn liegt wie etwa $\mathcal{H}^{(q_1)}$. Dann gibt es ein $\Phi \in U$ und ein exzeptionelles, einfaches Objekt $E_1 \in \mathcal{H}^{(q_1)}$ mit $\Phi(E_1) = E$. Ist $\varphi : \mathrm{K}_0(\mathbb{X}) \longrightarrow \mathrm{K}_0(\mathbb{X})$ der induzierte Automorphismus, so gilt $\overline{\sigma}_E = \varphi \circ \overline{\sigma}_{E_1} \circ \varphi^{-1}$, und daraus folgt die Behauptung. $\square$

Korollar 4.6.3. *Die Untergruppe von* $\operatorname{Aut} \mathrm{D}^b(\mathcal{H})$, *die von allen Verschiebungsautomorphismen an exzeptionellen Röhren in allen Röhrenfamilien erzeugt wird, operiert auf der Menge der Röhrenfamilien mit genau* 3 *Bahnen.*

Beweis. Um das Lemma anwenden zu können, sei im ersten Fall $U = \langle \sigma_L, \sigma_{\overline{L}}, \sigma_{S_1} \rangle$, im zweiten $U = \langle \sigma_L, \sigma_{L_1(1)}, \sigma_{S_1} \rangle$. $\square$

Proposition 4.6.4. *Gibt es ein* $q \in \overline{\mathbb{Q}}$ *mit* $\sigma[\mathbb{X}\langle q\rangle] = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, *so daß ein homogener,* multiplizitätenfreier *und rationaler Punkte* $x_0 \in \mathbb{X}\langle q\rangle$ *existiert, so operiert die Automorphismengruppe von* $\mathrm{D}^b(\mathcal{H})$ *auf der Menge der Intervallkategorien* $\mathcal{H}\langle q\rangle[n]$ $(q \in \overline{\mathbb{Q}},\ n \in \mathbb{Z})$ *mit genau zwei Bahnen.*

Beweis. Wegen 4.3.6 kann man $q = \infty$ annehmen. Also gibt es ein homogen einfaches Objekt $S$ mit $[S] = \mathbf{w}$, welches multiplizitätenfrei ist. Dann ergibt sich die Behauptung mit Tabelle A.1, 4. Spalte, auf Seite 84. □

Lemma 4.6.5. *Sei* $\sigma[\mathbb{X}] = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. *Der unterliegende zahme Bimodul* ${}_FM_G$ *vom Typ* $(2,2)$ *ist genau dann nicht-einfach, wenn es über der zugehörigen homogenen Kurve* $\mathbb{Y}$ *einen rationalen multiplizitätenfreien Punkt* $y \in \mathbb{Y}$ *gibt, und dies gilt genau dann, wenn es einen homogenen rationalen Punkt in* $\mathbb{X}$ *gibt, der multiplizitätenfrei ist.*

Beweis. Folgt direkt aus C.1.2. □

## 4.7. Realisierung der tubularen Symbole

Definition 4.7.1. Ein tubulares Symbol $\sigma$ wird durch eine kanonische Algebra $\Lambda$ *realisiert*, falls $\mathrm{K}_0(\Lambda)$, ausgestattet mit der Rangfunktion, die durch die zentrale tubulare Familie in $\mathrm{mod}(\Lambda)$ induziert wird (also dem negativen Defekt in [**40**] entspricht), das Symbol $\sigma$ liefert.

Offenbar ist ein tubulares Symbol $\sigma$ genau dann realisierbar, wenn es eine (tubulare) exzeptionelle Kurve $\mathbb{X}$ gibt mit $\sigma[\mathbb{X}] = \sigma$.

Bemerkung 4.7.2. Jedes über einem Körper $k$ kommutativ realisierbare tubulare Symbol (Tabelle 3.2) ist durch eine kanonische $k$-Algebra realisierbar.

Bemerkung 4.7.3. Sei $k$ ein Körper, und $\sigma$ ein tubulares Symbol, welches sich realisieren läßt durch eine kanonischen $k$-Algebra $\Lambda$ und welches zwei Anstiegsklassen hat (Tabelle A.1). Ist $\sigma'$ ein zu $\sigma$ äquivalentes Symbol (vgl. Abschnitt A.5) mit $\sigma \neq \sigma'$, so ist auch $\sigma'$ realisierbar durch eine kanonische $k$-Algebra $\Lambda'$. Dies geschieht mit der Kippbündel-Konstruktion aus [**32**], wie sie im Beispiel 4.5.4 durchgeführt wurde. Außerdem zeigt dies:

(1) $\Lambda$ und $\Lambda'$ sind deriviert äquivalent; genauer:
(2) $\Lambda$ (bzw. $\Lambda'$) ist versteckt-kanonisch vom Typ $\Lambda'$ (bzw. $\Lambda$).
(3) Die zu den zentralen separierenden tubularen Familien gehörigen Garbenkategorien $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Lambda, \mathrm{mod}_0(\Lambda))$ und $\mathcal{H}' = \mathcal{H}(\Lambda', \mathrm{mod}_0(\Lambda'))$ sind *nicht* äquivalent.
(4) $\Lambda$ und $\Lambda'$ sind *nicht* isomorph.

Aussage 3 folgt aus Unterpunkt (4) in Theorem 7. Aussage 4 ergibt sich, da ein Isomorphismus von $\Lambda$ nach $\Lambda'$ die Rangfunktionen bewahrt.

Satz 4.7.4. *Jedes tubulare Symbol wird realisiert durch eine* (*tubulare*) *kanonische* $k$*-Algebra für einen geeigneten Körper* $k$.

Beweis. (1) Es sind alle tubularen Symbole, die kommutativ realisierbar sind (vgl. Tabelle 3.2), sowie die Symbole, die dazu äquivalent sind, nach den Vorbemerkungen durch eine kanonische Algebra realisierbar.

Die Realisierung der übrigen tubularen Symbole ergibt sich mit Hilfe der Gewichtseinfügung, wie in [**31**] beschrieben, und den folgenden Argumenten (zum Begriff der Symboldaten vgl. Anhang C.2):

(2) Das Symbol $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist über $\mathbb{R}$ realisierbar, weil es eine einfache reguläre Darstellung über $\mathbb{R}$ des Bimoduls $\mathbb{C} \xrightarrow{\mathbb{C}\oplus\overline{\mathbb{C}}} \mathbb{C}$ mit Symboldaten $\begin{pmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} & \mathbb{C} \end{pmatrix}$ gibt, vgl. Abschnitt C.2.

(3) Das Symbol $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ist über $\mathbb{R}$ realisierbar, weil es einfache reguläre Darstellungen über dem Bimodul $\mathbb{C} \xrightarrow{\mathbb{C}\oplus\overline{\mathbb{C}}} \mathbb{C}$ mit Symboldaten $\begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} & \mathbb{C} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} & \mathbb{R} \end{pmatrix}$ gibt, vgl. C.2.

(4) Das Symbol $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ist über $\mathbb{R}$ realisierbar. Man verwendet dasselbe Argument wie in (3). Man hat nur zu beachten, daß es mindestens zwei einfache reguläre Darstellungen mit Symboldaten $\binom{1}{1}$ gibt.

(5) Es bleibt noch zu zeigen, daß das Symbol $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ realisierbar ist. Dies wird über dem folgenden Körper $K$ gelten: Sei $K = \mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{3}})$ und $L = K(\sqrt[3]{2})$. Dann ist $L/K$ eine Galoiserweiterung mit $[L : K] = 3$ und zyklischer Galoisgruppe, die von einem Automorphismus $\sigma$ erzeugt wird. Sei $M$ der Bimodul ${}_L L_L \oplus_L L_{\overline{L}}$, wobei die rechte Operation auf ${}_L L_{\overline{L}}$ via $\sigma$ gegeben ist.

Sei $D = L[T, \sigma]$ der Polynomring über $L$ in einer Unbestimmten $T$, so daß $Tx = \sigma(x)T$ gilt für alle $x \in L$. Sei $I = (T - \sqrt[3]{2})D$ und $P = (T^3 - 2)D$. Mit $\beta = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ gilt $T^3 - 2 = (T - \sqrt[3]{2})(T - \beta\sqrt[3]{2})(T - \beta^2\sqrt[3]{2})$. Es folgt: $D/P \simeq \mathrm{M}_3(K)$, $\mathrm{End}_D(D/I) \simeq K$. Der einfache $D$-Modul $D/I$ hat damit die Symboldaten $\begin{pmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} & K \end{pmatrix}$ (erhält man wie in Abschnitt C.2). Daher gibt es eine einfache reguläre Darstellung über $M$ mit diesen Symboldaten, und nach [**38**, Thm. 7.4] gibt es auch eine einfache reguläre Darstellung mit Daten $\begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} & L \end{pmatrix}$.

□

## 4.8. Wurzeln und unzerlegbare Garben

Sei $\mathbb{X}$ eine tubulare exzeptionelle Kurve mit zugehöriger erblicher Kategorie $\mathcal{H} = \mathrm{coh}(\mathbb{X})$, und sei $(\mathrm{K}_0(\mathbb{X}), \mathbf{w})$ das zugehörige tubulare kanonische Gitter, wobei $\mathbf{w}$ den Garbenrang definiert.

Sei $(V, \mathbf{w})$ ein tubulares kanonisches Gitter mit kanonischer Basis

$$\mathbf{a} \mid \tau^j \mathbf{s_i} \ (1 \le i \le t,\ 0 \le j \le p_i - 2) \mid \mathbf{w}$$

(vgl. Abschnitt A.2) und Rang $\mathrm{rk} = \mathrm{rk}_{\mathbf{w}}$. Sei für $\mathbf{x} \in V$ der Grad definiert durch

$$\deg \mathbf{x} = \frac{1}{\kappa\varepsilon}\langle\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle\rangle$$

(vgl. [**30**]). Sei $\mathbf{x} \in V$. Wir sagen, $\mathbf{x}$ *hat einen definierten Anstieg*, falls $\deg \mathbf{x}$ und $\operatorname{rk} \mathbf{x}$ nicht gleichzeitig null sind. Andernfalls sagen wir, daß $\mathbf{x}$ *keinen definierten Anstieg hat*. Diese Definition ist unabhängig von den speziell gewählten Rang- und Gradfunktionen. Denn ein $\mathbf{x} \in V$ hat genau dann keinen definierten Anstieg, wenn $\mathbf{x} \in (\operatorname{Rad} V)^{\perp}$ gilt. Deswegen gilt auch: Hat $\mathbf{x} \in V$ einen definierten Anstieg, und ist $\phi \in \operatorname{Aut} V$, so hat auch $\phi\mathbf{x}$ einen definierten Anstieg.

Beispiel 4.8.1. Sei $V$ das tubulare kanonische Gitter mit Symbol $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und kanonischer Basis $\mathbf{a} \mid \mathbf{s_1} \mid \mathbf{w}$, und $\mathbf{w}$ definiere den Rang rk. Dann ist $\mathbf{x} = \mathbf{s_1} - \mathbf{w}$ eine Wurzel mit $\operatorname{rk} \mathbf{x} = 0$ und $\deg \mathbf{x} = 0$. Also hat $\mathbf{x}$ keinen definierten Anstieg. Dies zeigt auch, daß [**34**, Lem. 2.9] nicht verallgemeinerbar ist.

Sei $q$ die durch $q(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$ $(\mathbf{v} \in V)$ definierte quadratische Form $q : V \longrightarrow \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$\mathbf{x} \in q^{-1}(1) \cap (\operatorname{Rad} V)^{\perp}.$$

Dies ist ein Beispiel für eine Situation, in dem die Bedingung des Unterscheidungslemmas aus [**6**] nicht erfüllt ist. Es gibt aber noch eine weitere bemerkenswerte Eigenschaft dieses Symbols:

Sei $\mathbb{X}$ eine exzeptionelle Kurve mit $V = \mathrm{K}_0(\mathbb{X})$, so daß der Garben-Rang durch $\mathbf{w}$ definiert wird. Sei $\mathbf{y} := \mathbf{s_1} + \mathbf{w}$. Man sieht, daß $\mathbf{y}$ eine Wurzel ist, und einen definierten Anstieg hat, nämlich Anstieg $\infty$. Aber es gibt *keine* unzerlegbare Garbe $F \in \operatorname{coh}(\mathbb{X})$ mit $\mathbf{y} = \pm[F]$. Denn ein solches $F$ müßte endliche Länge in $\operatorname{coh}(\mathbb{X})$ haben und in der Ausnahmeröhre liegen (da $\mathbf{y}$ eine Wurzel ist). Es folgte dann $\mathbf{s_1} + \mathbf{w} = \pm[F] = \sum_{j=a}^{b} \tau^j \mathbf{s_1} = 2(b-a)\mathbf{w} + \tau^a \mathbf{s_1}$, was wegen $f_1 = 2$ nicht möglich ist.

Lemma 4.8.2. $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ *ist das einzige tubulare Symbol, so daß eine Wurzel existiert, die* keinen *definierten Anstieg hat.*

Beweis. Jede Wurzel vom Rang null ist nach A.2.3 (mit den dortigen Bezeichnungen) von der Form

$$\mathbf{x} = \pm \sum_{j=m}^{m+l} \tau^j \mathbf{s_i} + n\mathbf{w},$$

wobei $p_i$ nicht $l+1$ teilt und $n\frac{e_i}{f_i} \in \mathbb{Z}$. Es gilt dann $\deg \mathbf{x} = (l+1) f_i \frac{p}{p_i} + np$ $(p = \operatorname{kgV}(p_1, \ldots, p_t))$. Man sieht, daß in jedem der tubularen Fälle $\neq \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ die Beziehung $n \in f_i\mathbb{Z}$ gilt. Daraus folgt, daß $\deg \mathbf{x} = 0$ nur in dem genannten Fall möglich ist. $\square$

Satz 4.8.3. *Sei* $\sigma(\mathbb{X}) \neq \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$. *Sei* $\mathbf{x} \in \mathrm{K}_0(\mathbb{X})$ *eine Wurzel. Dann gibt es ein bis auf Isomorphie eindeutiges unzerlegbares* $F \in \operatorname{coh}(\mathbb{X})$ *mit* $\mathbf{x} = \pm[F]$, *und* $F$ *liegt in einer Ausnahmeröhre.*

Beweis. Wir nehmen zunächst an, daß $\operatorname{rk} \mathbf{x} = 0$ gilt. Aus den Argumenten des Beweises von Lemma 4.8.2 folgt, daß $\mathbf{x}$ bis auf das Vorzeichen die Form

$$\mathbf{x} = \sum_{j=m}^{m+l} \tau^j \mathbf{s_i}$$

hat, und es folgt $\mathbf{x} = [S_i^{(l+1)}]$, wobei $S_i$ die exzeptionell einfache Garbe ist mit $[S_i] = \mathbf{s_i}$ und $[S_i^{(l+1)}]$ die unzerlegbare Garbe in derselben Röhre mit Sockel $\tau^{m+l} S_i$ und Länge $l+1$. Die Eindeutigkeit folgt wie in [**34**, Lem. 2.9].

Setze $\mathcal{H} := \operatorname{coh}(\mathbb{X})$. Hat $\mathbf{x}$ einen beliebigen Anstieg $q$, so ist $\mathbf{x}$ vom $q$-Rang null, und es gibt eine tubulare exzeptionelle Kurve $\mathbb{Y}$, so daß $\operatorname{coh}_0(\mathbb{Y}) = \mathcal{H}^{(q)}$ und $\mathrm{K}_0(\mathbb{Y}) = \mathrm{K}_0(\mathbb{X})$. Nach dem ersten Teil gibt es ein unzerlegbares $F \in \operatorname{coh}_0(\mathbb{Y})$ mit $\pm[F] = \mathbf{x}$. $F$ ist aber auch ein unzerlegbares Objekt in $\operatorname{coh}(\mathbb{X})$. □

## 4.9. Moduln über tubularen Algebren

Es sei weiterhin $\Sigma$ eine tubulare Algebra mit exzeptioneller Kurve $\mathbb{X}$ und zugehöriger Garbenkategorie $\mathcal{H} = \operatorname{coh}(\mathbb{X})$.

$\Sigma$ ist realisierbar als torsionsfreies Kippobjekt in $\mathcal{H}$. Es gibt also ein solches Kippobjekt $T \in \mathcal{H}$ mit $\operatorname{End}(T) = \Sigma$. Sei $q_1 := \mu_{max}$ der maximale Anstieg eines unzerlegbaren direkten Summanden von $T$, sei $q_0 := \mu_{min}$ der minimale Anstieg eines unzerlegbaren direkten Summanden. Wir bezeichnen mit $]\, q_1, q_0[1]\, [$ die geordnete Teilmenge von $\mathbb{Z} \times \overline{\mathbb{Q}}$ (versehen mit der lexikographischen Ordnung; wir schreiben $q[n]$ statt $(n, q)$ und identifizieren $q \in \overline{\mathbb{Q}}$ mit $q[0]$), die aus den Elementen $q \in \mathbb{Z} \times \overline{\mathbb{Q}}$ mit $q_1 < q < q_0[1]$ besteht. Für $q \in \overline{\mathbb{Q}}$ und $n \in \mathbb{Z}$ sei $\mathcal{H}^{(q[n])} = \mathcal{H}^{(q)}[n]$ und $\mathbb{X}\langle q[n] \rangle = \mathbb{X}\langle q \rangle$.

Theorem 8. *Sei $\Sigma$ eine tubulare Algebra über dem Körper $k$. Der Auslander-Reiten-Köcher von* $\operatorname{mod}(\Sigma)$ *besteht aus den folgenden Komponenten:*

- *Der präprojektiven Komponente, die übereinstimmt mit der präprojektiven Komponente einer versteckten Algebra vom zahm-erblichen Typ.*
- *Für jedes $q \in ]\, q_1, q_0[1]\, [$ sowie $q = q_1$ und $q = q_0[1]$ einer tubularen Familie*

$$(\mathcal{T}_x^{(q)})_{x \in \mathbb{X}\langle q \rangle},$$

  *wobei*
  - *die $\mathcal{T}_x^{(q)}$ stabile Röhren sind für alle $q \in ]\, q_1, q_0[1]\, [$; die Röhrenfamilien $(\mathcal{T}_x^{(q)})_{x \in \mathbb{X}\langle q \rangle}$ stimmen mit* $\operatorname{ind} \mathcal{H}^{(q)}$ *überein;*
  - *einige der Ausnahmeröhren $\mathcal{T}_x^{(q_1)}$ projektive Moduln enthalten;*
  - *einige der Ausnahmeröhren $\mathcal{T}_x^{(q_0[1])}$ injektive Moduln enthalten.*
- *Der präinjektiven Komponente, die übereinstimmt mit der präinjektiven Komponente einer versteckten Algebra vom zahm-erblichen Typ.*

Die Anzahlen der Isomorphieklassen der stabilen Röhrenfamilien

$$(\mathcal{T}_x^{(q)})_{x \in \mathbb{X}\langle q \rangle} \quad (q \in ]\, q_1, q_0[1]\, [)$$

ergeben sich aus den vorherigen Abschnitten.

Beweis. Der Beweis verläuft ähnlich wie in [**34**, Thm. 5.7]. Sei $T = T' \oplus T_{max}$, wobei $T_{max} = T_1 \oplus \cdots \oplus T_t$ aus den direkten Summanden $T_i$ von $T$ besteht mit

$\mu(T_i) = \mu_{max}$. Sei $X \in \mathcal{H}$ unzerlegbar. Zu untersuchen ist, wann $X$ ein $\Sigma$-Modul ist, wann also $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{H}}(T, X) = 0$ gilt. Sei $q = \mu(X)$.

1. Fall: $q > q_1$. Dann gilt immer $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{H}}(T, X) = 0$, und $X$ liegt in einer stabilen Röhre.

2.Fall: $q = q_1$. Genau wie in [**34**, Thm. 5.7] zeigt man, daß $X$ (und damit jedes Objekt in derselben Röhre) ein $\Sigma$-Modul ist, wenn $X$ in einer Komponente liegt, die keines der $T_i$ ($i \in \{1, \dots, t\}$) enthält; liegt $X$ andererseits in der Komponente eines $T_i$, so ist es ein $X$-Modul genau dann, wenn es nicht auf einem Costrahl liegt, der in einem von einem $\tau T_j$ aufgespannten Flügel endet.

3. Fall: $q < q_1$. Dann gilt $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(T_{max}, X) = 0$, und aus $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{H}}(T, X) = 0$ folgt $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{H}}(T_{max}, X) = 0$, also $X \in T_{max}^{\perp}$.

Es sei $\Sigma' := \mathrm{End}\, T'$ und $\mathbb{Y} = \mathbb{X}\langle q_1 \rangle$ die tubulare exzeptionelle Kurve mit $\mathcal{H}\langle q_1 \rangle = \mathrm{coh}(\mathbb{Y})$. Dann ist $T_{max}$ von endlicher Länge in $\mathrm{coh}(\mathbb{Y})$. Mit den Argumenten aus [**27**] und [**35**] ist $T_{max}^{\perp}$, gebildet in $\mathrm{coh}(\mathbb{Y})$, wieder eine (zusammenhängende) Kategorie vom Typ $\mathrm{coh}(\mathbb{Y}')$, wobei $\mathbb{Y}'$ eine exzeptionelle Kurve ist, die einen reduzierten Gewichtstyp hat und deren Symboldaten ansonsten gleich geblieben sind. Daher gilt $\delta[\mathrm{K}_0(\mathbb{Y}')] < \delta[\mathrm{K}_0(\mathbb{Y})] = 0$ (vgl. [**30**] oder A.2), also ist $\mathbb{Y}'$ von domestiziert zahmen Typ (vgl. [**32**, Thm. 7.1]), und $T'$ ist ein Kippbündel in $\mathrm{coh}(\mathbb{Y}')$. Also ist $\Sigma' = \mathrm{End}\, T'$ eine versteckte Algebra vom zahm-erblichen Typ, und die Unterkategorie von $\mathrm{mod}(\Sigma')$, die aus den regulären Moduln besteht, stimmt mit $\mathrm{coh}_0(\mathbb{Y}')$ überein.

Bildet man $T_{max}^{\perp}$ in $\mathrm{coh}(\mathbb{X})$, so gilt

$$T_{max}^{\perp} \cap \mathrm{mod}(\Sigma) = \mathrm{mod}(\Sigma') \cap \mathrm{coh}(\mathbb{X}).$$

Daher stimmt die Menge aller $X \in \mathrm{coh}(\mathbb{X})$ mit $X \in \mathrm{mod}(\Sigma)$ und $\mu(X) < q_1$ überein mit der präprojektiven Komponente von $\Sigma'$. $\square$

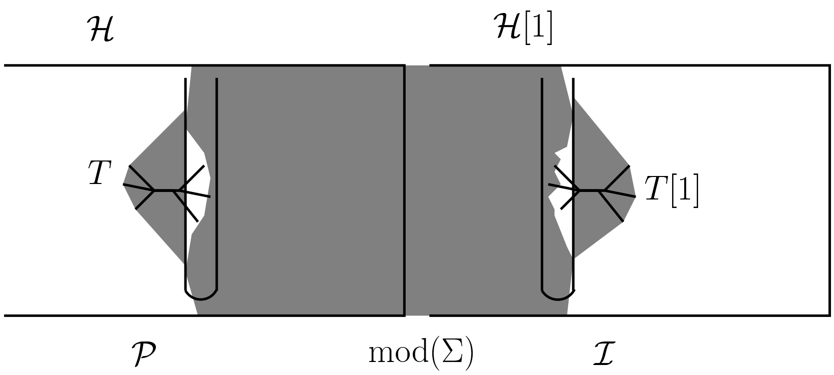


Abbildung 4.3. $\mathrm{mod}(\Sigma)$ innerhalb der derivierten Kategorie

Da sich eine kanonische Algebra als Kippobjekt realisieren läßt, in denen $T_{max}$ und $T_{min}$ exzeptionell sind und (im tubularen Fall) Röhren maximalen Ranges aufspannen (vgl. [**32**]), erhält man sofort die folgende Aussage.

Korollar 4.9.1. *Sei $\Lambda$ tubular kanonisch. Dann gibt es genau eine Röhre, die (genau) einen projektiven Modul enthält. Ebenso gibt es genau eine Röhre, die (genau) einen injektiven Modul enthält. Diese nicht-stabilen Röhren entstehen* *jeweils aus stabilen Röhren maximalen Ranges* (= kgV *der Ränge der Ausnahmeröhren*). □

ANHANG A

# K-theoretische Invarianten

In diesem Anhang liefern wir die K-theoretischen Hilfsmittel, insbesondere diejenigen, die notwendig sind, um die Klassifikationssätze der tubularen Familien über tubularen Algebren (Theoreme 7 und 8) zu beweisen. Als Grundlage dient [**30**], wo *kanonische Gitter* untersucht werden, die als Modell der Grothendieck-Gruppen von versteckt-kanonischen Algebren fungieren. Sie werden definiert als spezielle abelsche Gruppen mit Bilinearform, die durch sogenanntes *Anheften von Röhren* aus einem sehr speziellen Fall (der der Grothendieck-Gruppe einer zahm-erblichen Bimodulalgebra entspricht) hervorgehen. Weiterhin wird dort gezeigt, daß solche kanonischen Gitter immer sogenannte kanonische Basen besitzen [**30**, Prop. 7.7].

Im folgenden zeigen wir, daß umgekehrt solche kanonischen Basen kanonische Gitter definieren; das macht den Umgang mit diesen Gittern bequemer.

Ferner wurde in [**30**] das *Symbol* eines kanonischen Gitters definiert. Wir werden zeigen, daß in den sogenannten *tubularen* Fällen (welche den Grothendieck-Gruppen der tubularen versteckt-kanonischen Algebren entsprechen) das Symbol keine Invariante ist: Ein tubulares kanonisches Gitter kann zwei Symbole besitzen. Statten wir ein tubulares kanonisches Gitter mit mehr Struktur aus (konkret: mit einer Rangfunktion), so zeigen wir, daß das Symbol zu einer Invariante wird. Wir geben die Paare von tubularen Symbolen an, die isomorphe kanonische Gitter liefern.

Das paarweise Auftreten von Symbolen in einigen tubularen Fällen ist der Grund dafür, daß tubulare Algebren i. a. zwei Isomorphieklassen von tubularen Familien haben können (Kapitel 4).

Wir wiederholen einige Begriffe, die in [**30**] definiert sind: Eine *bilineare Gruppe* ist eine endlich erzeugte abelsche Gruppe $V$, ausgestattet mit einer (nichtsymmetrischen) Bilinearform

$$\langle -,- \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{Z}$$

und einem Automorphismus $\tau : V \longrightarrow V$ (der *Coxeter-Transformation* genannt wird), der folgender Bedingung genügt: Für alle $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in V$ gilt

$$\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{x}, \tau\mathbf{y} \rangle.$$

Ist zusätzlich $V$ nicht-ausgeartet, so heißt $V$ *bilineares Gitter*. Wir nehmen stets an, daß die Bilinearform $\langle -,- \rangle$ *normalisiert* ist, d. h. es gilt $\langle V, V \rangle = \mathbb{Z}$.

Morphismen zwischen bilinearen Gruppen (Gittern) sind Homomorphismen von Gruppen, die die Bilinearform bewahren und mit den Coxeter-Transformationen vertauschen.

## A.1. Rangfunktionen

Sei $V = (V, \langle -, - \rangle, \tau)$ eine bilineare Gruppe. Eine lineare Abbildung $r : V \longrightarrow \mathbb{Z}$ heißt *Rang* oder *Rangfunktion*, falls $r$ surjektiv ist und mit dem Automorphismus $\tau$ verträglich ist: $r \circ \tau = r$.

Das *Radikal* von $V$ sei definiert durch $\operatorname{Rad} V = \{\mathbf{x} \in V \mid \tau\mathbf{x} = \mathbf{x}\}$. Sei $\mathbf{w} \in \operatorname{Rad} V$ mit $\mathbf{w} \notin \operatorname{Kern} V$. Sei $c := [\mathbb{Z} : \langle V, \mathbf{w} \rangle]$, und definiere eine Rangfunktion durch $\operatorname{rk}_{\mathbf{w}} = \frac{1}{c}\langle -, \mathbf{w} \rangle$, welche $\mathbf{w}$-*Rang* genannt wird.

Sei nun $V$ ein bilineares Gitter. Ein direkter Summand von $\operatorname{Rad} V$ vom Rang 1 heißt 1-*Röhre*.

Sei $r$ eine Rangfunktion. Tensoriert man mit $\mathbb{Q}$, so erhält man eine Bilinearform, die eine vollständige Dualität ist; es gibt also ein eindeutig bestimmtes $\frac{\mathbf{v}}{c} \in V \otimes \mathbb{Q}$ ($c \in \mathbb{Q}$, $c \neq 0$) mit $r \otimes \mathbb{Q} = \langle -, \frac{\mathbf{v}}{c} \rangle \otimes \mathbb{Q}$, wobei man annehmen kann, daß man aus $\mathbf{v}$ keine weiteren ganzzahligen Faktoren herausziehen kann (d. h. es gibt kein $\mathbf{v}' \in V$ mit $m\mathbf{v}' = \mathbf{v}$ für ein $m \geq 2$). Es folgt $r = \frac{1}{c}\langle -, \mathbf{v} \rangle$. Da $r$ surjektiv ist, gilt $c = [\mathbb{Z} : \langle V, \mathbf{v} \rangle]$. Da $r$ ein Rang ist, folgt $\tau\mathbf{v} = \mathbf{v}$, also $\mathbf{v} \in \operatorname{Rad} V$. Da man keine weiteren Faktoren aus $\mathbf{v}$ ziehen kann, ist $V/\mathbb{Z}\mathbf{v}$ torsionsfrei und somit frei, also ist $\mathbb{Z}\mathbf{v}$ ein direkter Summand in $\operatorname{Rad} V$, also eine 1-Röhre. Damit ist $\mathbf{v}$ eindeutig durch $r$ bestimmt, und es ist $r = \operatorname{rk}_{\mathbf{v}}$.

Es korrespondieren also Rangfunktionen und Erzeuger von 1-Röhren. Zwei Ränge $r$ und $r'$ auf $V$ heißen *ähnlich*, wenn es einen Automorphismus $\sigma \in \operatorname{Aut} V$ gibt mit $r' = r\sigma$. Ist $\sigma \in \operatorname{Aut} V$ und sind $\mathbb{Z}\mathbf{w}$ und $\mathbb{Z}\mathbf{w}'$ zwei 1-Röhren, so gilt $\operatorname{rk}_{\mathbf{w}} = \operatorname{rk}_{\mathbf{w}'} \sigma$, genau wenn $\sigma\mathbf{w}' = \mathbf{w}$.

Ist $(V, \mathbf{w})$ ein kanonisches Gitter (welches zu einem *Symbol* definiert wird, vgl. [**30**, 7.6]; dort heißen die Gitter kanonisch bilinear), welches *nicht* tubular ist, so sind je zwei Ränge auf $V$ ähnlich, sind sogar bis auf das Vorzeichen eindeutig bestimmt (das Radikal ist in diesem Fall vom Rang 1, vgl. [**30**]).

Seien $V$ und $V'$ bilineare Gitter, und $\mathbf{w} \in V$, $\mathbf{w}' \in V'$ ausgezeichnete Elemente, die 1-Röhren, also Rangfunktionen definieren. Diesbezüglich heißt ein Isomorphismus von bilinearen Gittern $\sigma : V \longrightarrow V'$ *Rangisomorphismus*, falls $\sigma\mathbf{w} = \mathbf{w}'$ gilt.

## A.2. Kanonische Basen und Invarianz des Symbols

Sei $V$ eine (normalisierte) bilineare Gruppe. Wurzeln und $p$-Röhren ($p \geq 2$) werden wie für bilineare Gitter definiert (vgl. [**30**]): Ein $\mathbf{u} \in V$ heißt *Wurzel*, falls $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0$ und $\frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle} \in \mathbb{Z}$ gilt für alle $\mathbf{x} \in V$.

Sei $\mathbf{u} \in V$ eine Wurzel mit endlicher $\tau$-Periode $p \geq 2$. Wir nennen

$$\mathbf{u}, \tau\mathbf{u}, \ldots, \tau^{p-1}\mathbf{u}$$

eine *Wurzelbasis*, falls die Elemente linear unabhängig über $\mathbb{Z}$ sind und

$$\langle \tau^i\mathbf{u}, \tau^j\mathbf{u} \rangle = \begin{cases} \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle & j \equiv i \bmod p, \\ -\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle & j \equiv i + 1 \bmod p, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt. Eine Untergruppe $T \subset V$ heißt $p$-*Röhre*, falls sie von einer Wurzelbasis der Länge $p$ erzeugt wird.

Der folgende Satz ist gewissermaßen eine Umkehrung von [**30**, Prop. 7.7].

Satz A.2.1. *Sei $V$ eine (normalisierte) bilineare Gruppe und*

$$B_{\mathbf{w}}: \qquad \mathbf{a},\ \tau^j \mathbf{s_i}\ (1 \leq i \leq t,\ 0 \leq j \leq p_i - 2),\ \mathbf{w}$$

*ein Erzeugendensystem von $V$ mit folgenden Eigenschaften (1)–(4):*

(1) $\mathbf{w} \in \operatorname{Rad} V$, $\mathbf{w} \notin \operatorname{Kern} V$.

(2) $\mathbf{a}$ *ist eine Wurzel vom $\mathbf{w}$-Rang 1.*

(3) *Die $\mathbf{s_i}$ sind Wurzeln vom $\mathbf{w}$-Rang 0 und deren $\tau$-Orbiten bilden Wurzelbasen paarweise orthogonaler $p_i$-Röhren.*

(4) $\langle \mathbf{a}, \mathbf{s_i} \rangle > 0$ *und* $\langle \mathbf{a}, \tau^j \mathbf{s_i} \rangle = 0$ *für* $0 < j \leq p_i - 1$*; ferner* $\langle \mathbf{a}, \mathbf{s_i} \rangle / \langle \mathbf{a}, \mathbf{w} \rangle \in \mathbb{Z}$.

*Unter diesen Voraussetzungen gilt: Die Zahlen*

$$\varepsilon := \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{w} \rangle}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle},\ e_i := \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{s_i} \rangle}{\langle \mathbf{s_i}, \mathbf{s_i} \rangle},\ f_i := \frac{1}{\varepsilon} \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{s_i} \rangle}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle}$$

*sind positive ganze Zahlen, $B_{\mathbf{w}}$ ist eine Basis, $\langle -, - \rangle$ ist nicht-ausgeartet, $\varepsilon \in \{1, 2\}$, und $(V, \mathbf{w})$ ist ein kanonisches bilineares Gitter mit Symbol*

$$\sigma[V] = \left( \begin{array}{c|c} p_1, \ldots, p_t & \\ d_1, \ldots, d_t & \varepsilon \\ f_1, \ldots, f_t & \end{array} \right),$$

*wobei $d_i = e_i f_i$.*

Wir nennen (abweichend von [**30**]) eine Basis $B_{\mathbf{w}}$ mit den Bedingungen des Satzes *kanonisch*, oder genauer $\mathbf{w}$-*kanonisch*.

Beweis. $\varepsilon$, $e_i \in \mathbb{N}$ folgt, da $\mathbf{a}$ und $\mathbf{s_i}$ Wurzeln sind. Sei $\kappa := \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle$. Es gilt $\kappa \frac{\varepsilon f_i}{e_i} = \langle \mathbf{s_i}, \mathbf{s_i} \rangle$ $(i = 1, \ldots, t)$. Bezüglich des Erzeugendensystems $B_{\mathbf{w}}$ ist die Cartanmatrix (Gramsche Matrix) gegeben durch

$$\left( \begin{array}{c|cccc|c|cccc|c}
\kappa & \kappa\varepsilon f_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \kappa\varepsilon f_t & 0 & \cdots & 0 & \kappa\varepsilon \\
\hline
0 & \kappa\frac{\varepsilon f_1}{e_1} & -\kappa\frac{\varepsilon f_1}{e_1} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \kappa\frac{\varepsilon f_1}{e_1} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & -\kappa\frac{\varepsilon f_1}{e_1} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \kappa\frac{\varepsilon f_1}{e_1} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\hline
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \kappa\frac{\varepsilon f_t}{e_t} & -\kappa\frac{\varepsilon f_t}{e_t} & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \kappa\frac{\varepsilon f_t}{e_t} & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -\kappa\frac{\varepsilon f_t}{e_t} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \kappa\frac{\varepsilon f_t}{e_t} & 0 \\
\hline
-\kappa\varepsilon & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{array} \right).$$

Vertauscht man die erste mit der letzten Spalte, so sieht man, daß die Determinante dieser Matrix $\neq 0$ ist. Daher bildet $B_{\mathbf{w}}$ eine Basis, und $\langle -, - \rangle$ ist nicht-ausgeartet (Gramsches Kriterium [**44**, 70.6]). Es folgt weiter, daß $\mathbf{w}$ eine 1-Röhre aufspannt. Sei $m = \min\{l \in \mathbb{N} \mid l\frac{\varepsilon f_i}{e_i} \in \mathbb{Z},\ i = 1, \ldots, t\}$. Dann gilt $m \mid \kappa$ und weiter $\frac{\kappa}{m} \mid \langle V, V \rangle$ (was man auf der Basis $B_{\mathbf{w}}$ nachprüft). Da $V$ normalisiert ist, folgt $m = \kappa$.

Sei $T_i$ die zum $\tau$-Orbit von $\mathbf{s_i}$ gehörige $p_i$-Röhre. Sei $S$ die Menge $\{\tau^j\mathbf{s_i} \mid 1 \le i \le t,\ 0 \le j \le p_i - 2\}$.

Sei $V' = S^\perp = \{\mathbf{x} \in V \mid \langle S, \mathbf{x}\rangle = 0\}$. Es gilt $V' = \mathbb{Z}\mathbf{a} \oplus \mathbb{Z}\mathbf{w}$, denn jedes $\mathbf{x}$ in $V'$ hat die Form $\mathbf{x} = n\mathbf{a} + m\mathbf{w} + \sum_{i=1}^t \mathbf{u_i}$, wobei $\mathbf{u_i} \in T_i$ ist; da $\mathbf{x} \in S^\perp$, folgt dann, daß jedes $\mathbf{u_i}$ ein Vielfaches von $\mathbf{z_i} := \sum_{j=0}^{p_i-1} \tau^j\mathbf{s_i}$ ist; weil

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{z_i}\rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{s_i}\rangle = f_i\varepsilon\kappa = \langle \mathbf{a}, f_i\mathbf{w}\rangle,$$

folgt aus der Orthogonalität der Röhren $\mathbf{z_i} = f_i\mathbf{w}$, also ist $\mathbf{u_i} \in \mathbb{Z}\mathbf{w}$.

Wegen $\mathbf{w} \in \operatorname{Rad} V$ ist $\langle \mathbf{w}, \mathbf{w}\rangle = 0$ und $\langle \mathbf{a}, \mathbf{w}\rangle = \kappa\varepsilon$, daher ist $(V', \mathbf{w})$ mit der normalisierten Form $\frac{1}{\kappa}\langle -, -\rangle$ das bilineare Gitter $V_2(\varepsilon)$ mit $\varepsilon \in \{1, 2\}$.

Für jedes $l \in \{0, \ldots, t\}$ sei $W_l$ die von $\mathbf{a}$, $\mathbf{w}$ und $\tau^j\mathbf{s_i}$ $(1 \le i \le l,\ 0 \le j \le p_i - 2)$ erzeugte Untergruppe von $V$. Zu zeigen ist, daß $W_l$ aus $W_{l-1}$ entsteht, indem die Röhre $T_l$ angeheftet wird (im Sinne von [**30**]), genauer, daß $W_l = W_{l-1}\begin{pmatrix} p_l \\ d_l \\ f_l \end{pmatrix}$ gilt (mit $W_0 = V'$).

Für $l = 0, \ldots, t$ sei $\kappa_l = \min\{s \in \mathbb{N} \mid s\frac{\varepsilon f_i}{e_i} \in \mathbb{Z},\ i = 1, \ldots, l\}$. Dann gilt $1 = \kappa_0 \mid \kappa_1 \mid \ldots \mid \kappa_t = \kappa$. Man erhält per Induktion

$$\frac{\kappa_i}{\kappa_{i-1}} = \frac{e_i}{\operatorname{ggT}(\varepsilon\kappa_{i-1}f_i, e_i)}.$$

Außerdem zeigt man per Induktion, daß $\kappa_i/\kappa_{i-1}$ der Multiplikator aus [**30**, 7.] ist und $\langle -, -\rangle_{W_i} = \frac{\kappa_i}{\kappa}\langle -, -\rangle_{|W_i}$, indem man zeigt, daß die Relationen (6)–(9) aus [**30**] erfüllt sind: Es ist nämlich $\varepsilon\kappa_{i-1} = \varepsilon(W_{i-1}, \mathbf{w})$ und

$$\frac{\kappa_i}{\kappa}\langle \mathbf{s_i}, \mathbf{s_i}\rangle = \kappa_i\frac{\varepsilon f_i}{e_i} = \frac{\kappa_i}{\kappa_{i-1}}\frac{(\varepsilon\kappa_{i-1})f_i}{e_i}$$

sowie

$$\frac{\kappa_i}{\kappa}\langle \mathbf{a}, \mathbf{s_i}\rangle = \frac{\kappa_i}{\kappa}f_i\langle \mathbf{a}, \mathbf{w}\rangle = \frac{\kappa_i}{\kappa_{i-1}}f_i\langle \mathbf{a}, \mathbf{s_i}\rangle_{W_{i-1}}.$$

Es folgt

$$\langle -, -\rangle_{W_i|W_{i-1}} = \frac{\kappa_i}{\kappa_{i-1}}\langle -, -\rangle_{W_{i-1}}.$$

Bleibt noch $W_i = (W_{i-1} \oplus T_i)/\mathbb{Z}(\sum_{j=0}^{p_i-1} \tau^j\mathbf{s_i} - f_i\mathbf{w})$ für $i = 1, \ldots, t$ nachzuweisen: Dies folgt aus $\mathbf{z_i} = f_i\mathbf{w}$, wie oben gezeigt. □

Mit dem Symbol aus A.2.1 und $p = \operatorname{kgV}(p_1, \ldots, p_t)$ sei

$$\delta[V] := p\Big(\sum_{i=1}^t e_if_i\Big(1 - \frac{1}{p_i}\Big) - \frac{2}{\varepsilon}\Big).$$

Wir erinnern an folgende Definitionen aus [**30**]: Ein kanonisches Gitter heißt *domestiziert*, falls $\delta[V] < 0$, es heißt *tubular*, falls $\delta[V] = 0$, und wir nennen es *wild*, falls $\delta[V] > 0$ gilt. Für Charakterisierungen dieser Eigenschaften vgl. [**30**, Prop. 10.3] und [**32**, Thm. 7.1].

LEMMA A.2.2. *Sei $(V, \mathbf{w})$ ein bilineares Gitter mit der $\mathbf{w}$-kanonischen Basis $B_{\mathbf{w}}$ wie in A.2.1. Sei $(V', \mathbf{w}')$ ein weiteres bilineares Gitter mit einer $\mathbf{w}'$-kanonischen Basis*

$$B_{\mathbf{w}'}: \qquad \mathbf{a}',\ \tau^j \mathbf{s}'_{\mathbf{i}}\ (1 \le i \le t',\ 0 \le j \le p'_i - 2),\ \mathbf{w}',$$

*welche Zahlen $\kappa'$, $\varepsilon'$, $e'_i$ und $f'_i$ $(i = 1, \ldots, t')$, also ein Symbol, definiert. Sei $C$ (bzw. $C'$) die Cartanmatrix von $V$ (bzw. $V'$) bzgl. der Basis $B_{\mathbf{w}}$ (bzw. $B_{\mathbf{w}'}$).*

(1) *Sind die bilinearen Gitter $V$ und $V'$ isomorph, so gilt $\delta[V] = \delta[V']$, $t = t'$, $\det C = \det C'$ und (nach evtl. Umnumerierung) $p_i = p'_i$ $(i = 1, \ldots, t)$.*

(2) *Sind $(V, \mathbf{w})$ und $(V', \mathbf{w}')$ rangisomorph, so gilt außerdem $\kappa'\varepsilon' = \kappa\varepsilon$.*

BEWEIS. (1) Da $V$ und $V'$ isomorph sind, haben sie das gleiche Coxeterpolynom, und daher folgt aus [**30**, Prop. 7.8] $t = t'$ und die Gleichheit der Gewichte. Die Gleichheit der Determinanten folgt trivialerweise.

Sei $\sigma \in \mathrm{Iso}(V, V')$. Um die Invarianz von $\delta[V]$ zu zeigen, sei zunächst $V$ nicht-tubular. Dann ist $\operatorname{Rad} V = \mathbb{Z}\mathbf{w}$, und es folgt $\operatorname{Rad} V' = \mathbb{Z}\sigma\mathbf{w}$. Aus $\mathbf{w}$ erhält man den Verschiebungsautomorphismus $\sigma_0 = \sigma_{\mathbf{w}}$. Damit ergibt sich $\delta[V]$ eindeutig als diejenige natürliche Zahl $\delta$, so daß $\tau^p = \sigma_0^\delta$ (nach [**30**, Prop. 4.3] hat $\sigma_0$ unendliche Ordnung). Entsprechendes gilt für $\delta[V']$.

Sei jetzt $V$ tubular. Dann ist $\operatorname{Rad} V$ vom Rang 2, also auch $\operatorname{Rad} V'$, und daher ist auch $V'$ tubular, also $\delta[V] = 0 = \delta[V']$.

(2) Da es ein $\sigma \in \mathrm{Iso}(V, V')$ gibt mit $\sigma\mathbf{w} = \mathbf{w}'$, folgt $\kappa'\varepsilon' = [\mathbb{Z} : \langle V, \mathbf{w}\rangle] = [\mathbb{Z} : \langle V', \mathbf{w}'\rangle] = \kappa\varepsilon$. □

Sei $(V, \mathbf{w})$ ein kanonisches Gitter mit einer Basis wie in A.2.1. Sei $\mathbf{u} \in V$ eine Wurzel vom $\mathbf{w}$-Rang 0. Definiere $e(\mathbf{u}) = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{u}\rangle}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle}$ und $f(\mathbf{u}) = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{u}\rangle}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle}$. Der Quotient $\frac{e(\mathbf{u})}{f(\mathbf{u})}$ ist unabhängig von der Auswahl der Basis und heißt (*Wurzel-*) *Quotient* von $\mathbf{u}$.

LEMMA A.2.3. *Es gelten die Bezeichnungen aus A.2.1. Seien $T_i$ die von den $\tau$-Orbiten der $\mathbf{s_i}$ aufgespannten Röhren $(i = 1, \ldots, t)$. Sei $\mathbf{u} \in V$ eine Wurzel vom Rang 0. Dann gibt es ein $i \in \{1, \ldots, t\}$ und ein $n \in \mathbb{Z}$, so daß $n\frac{e_i}{f_i} \in \mathbb{Z}$ gilt und $\mathbf{u} = \mathbf{u}' + n\mathbf{w}$, wobei $\mathbf{u}' \in T_i$ eine Wurzel ist. Der Quotient von $\mathbf{u}$ ist $\frac{e_i}{f_i}$.*

BEWEIS. Es gibt eine Darstellung $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^t \mathbf{u_i} + n\mathbf{w}$ mit $\mathbf{u_i} \in T_i$ und $n \in \mathbb{Z}$. Weil $\mathbf{u}$ eine Wurzel ist, teilt $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle = \sum_{i=1}^t \langle \mathbf{u_i}, \mathbf{u_i}\rangle$ alle $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u_i}\rangle = \langle \mathbf{u_i}, \mathbf{u_i}\rangle$, und es folgt $\mathbf{u} = \mathbf{u_i} + n\mathbf{w}$ für ein $i$. Es folgt dann, daß $\mathbf{u}' = \mathbf{u_i}$ eine Wurzel in $T_i$ und dann auch in $V$ ist mit $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle = \langle \mathbf{u}', \mathbf{u}'\rangle = \langle \mathbf{s_i}, \mathbf{s_i}\rangle$ ([**30**, Prop. 5.2]). Damit ergibt sich $\frac{e(\mathbf{u})}{f(\mathbf{u})} = \frac{\kappa\varepsilon}{\langle \mathbf{s_i}, \mathbf{s_i}\rangle} = \frac{e_i}{f_i}$. Ist ferner $\mathbf{v}$ eine Wurzel in $T_i$, so ist $\mathbf{v} + n\mathbf{w}$ genau dann eine Wurzel, wenn $n\frac{e_i}{f_i} \in \mathbb{Z}$ gilt, wie man leicht nachprüft. □

KOROLLAR A.2.4. *Die Quotienten $\frac{e_i}{f_i}$ $(i = 1, \ldots, t)$ sind Invarianten des kanonischen Gitters $(V, \mathbf{w})$ bzgl. Rangisomorphismen.* □

PROPOSITION A.2.5. *Das Symbol ist eine vollständige Invariante eines domestizierten kanonischen Gitters $(V, \mathbf{w})$ bzgl. Isomorphie.*

BEWEIS. Betrachtung der Tabelle der domestizierten Symbole [**30**]. Beachte, daß jeder Isomorphismus schon ein Rangisomorphismus ist. □

SATZ A.2.6. *Das Symbol ist eine vollständige Invariante eines tubularen kanonischen Gitters* $(V, \mathbf{w})$ *bzgl. Rangisomorphie.*

BEWEIS. Tabelle A.1 auf Seite 84 zeigt die tubularen Symbole, geordnet nach Gewichtsfolgen und Determinanten der Cartanmatrizen. Eine weitere Unterscheidung bzgl. Rangisomorphie liefern die Produkte $\kappa\varepsilon$, mit Ausnahme der Symbole $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $(2\ 2 \mid 2)$; aber diese Symbole lassen sich durch ihre Wurzelquotienten unterscheiden: Im ersten Fall sind diese $\frac{1}{2}$, 2, im zweiten 1, 1. Die Vollständigkeit folgt so: Seien $(V, \mathbf{w})$ und $(V', \mathbf{w}')$ tubulare kanonische Gitter, die das gleiche Symbol haben. Dann gibt es kanonische Basen

$$B_{\mathbf{w}}: \qquad \mathbf{a},\ \tau^j \mathbf{s_i}\ (1 \le i \le t,\ 0 \le j \le p_i - 2),\ \mathbf{w}$$

von $V$ und

$$B_{\mathbf{w}'}: \qquad \mathbf{a}',\ \tau^j \mathbf{s}'_\mathbf{i}\ (1 \le i \le t,\ 0 \le j \le p_i - 2),\ \mathbf{w}'$$

von $V'$ wie in A.2.1. Da die Symbole gleich sind, kann man einen Rangisomorphismus $\sigma$ auf der Basis $B_{\mathbf{w}}$ definieren, indem man jedes Element aus $B_{\mathbf{w}}$ auf ein entsprechendes Element aus $B_{\mathbf{w}'}$ abbildet. Dabei ist $\sigma$ mit der Auslander-Reiten-Translation verträglich, da nach [**30**, Prop. 8.1] $\sigma\tau\mathbf{a} = \tau\sigma\mathbf{a}$ gilt. □

BEMERKUNG. Hat man zwei kanonische Basen $B_{\mathbf{w}}$ und $B_{\mathbf{w}'}$ wie im obigen Beweis gegeben, so liefern diese bis auf Permutation der Spalten dieselben Symbole genau dann, wenn es einen Rangisomorphismus $\sigma \in \mathrm{Iso}(V, V')$ (also mit $\sigma(\mathbf{w}) = \mathbf{w}'$) gibt und eine Permutation $\pi \in S_t$, so daß $\sigma\mathbf{s_i} = \mathbf{s}'_{\pi(\mathbf{i})}$ $(1 \le i \le t)$ und $\sigma\mathbf{a} = \mathbf{a}'$.

Bevor wir ein Beispiel angeben, welches zeigt, daß das Symbol im wilden Fall keine Invariante des kanonischen Gitters ist, zeigen wir noch, daß allgemein $\kappa$ und $\varepsilon$ Invarianten eines kanonischen Gitters sind bzgl. Rangisomorphie.

LEMMA A.2.7. *Es gelten die Voraussetzungen und Bezeichnungen aus A.2.3, und zusätzlich gelte, daß der* $\tau$*-Orbit von* $\mathbf{u}$ *eine Wurzelbasis aufspannt. Dann gibt es ein* $j$ *mit* $0 \le j \le p_i - 1$ *und* $\mathbf{u} = \tau^j \mathbf{s_i} + n\mathbf{w}$.

BEWEIS. Nach A.2.3 ist $\mathbf{u} = \mathbf{u_i} + n\mathbf{w}$ mit einer Wurzel $\mathbf{u_i} \in T_i$. Da $\langle \tau^j \mathbf{u_i}, \tau^l \mathbf{u_i} \rangle = \langle \tau^j \mathbf{u}, \tau^l \mathbf{u} \rangle$, und weil nur $\tau$-Orbiten von Wurzeln der Länge 1 in $T_i$ Wurzelbasen aufspannen, folgt die Behauptung. □

Sei $(V, \mathbf{w})$ ein kanonisches Gitter mit Symbol $\sigma[V]$. Da ein solches Symbol von $\mathbf{w}$ abhängt, nennen wir dieses auch genauer ein $\mathbf{w}$-Symbol von $V$. Im *tubularen* Fall ist ein $\mathbf{w}$-Symbol also immer eindeutig; jedoch kann es zu "verschiedenen $\mathbf{w}$'s" verschiedene Symbole geben, wie wir später sehen werden.

LEMMA A.2.8. *Es gelten die Bezeichnungen und Voraussetzungen aus A.2.2. Es gebe ein* $\sigma \in \mathrm{Iso}(V, V')$ *mit* $\sigma\mathbf{w} = \mathbf{w}'$. *Es gilt* $\mathbf{a}' \in \sigma\mathbf{a} + \mathbb{Z}\mathbf{w}'$ *genau dann, wenn (nach evtl. Umnumerierung)* $\sigma\mathbf{s_i} = \mathbf{s}'_\mathbf{i}$ $(i = 1, \ldots, t)$*; ist dies der Fall, so gilt* $e_i = e'_i$, $f_i = f'_i$ $(i = 1, \ldots, t)$ *und* $\varepsilon = \varepsilon'$.

BEWEIS. Wir nehmen o. E. an, daß $V = V'$, $\mathbf{w} = \mathbf{w}'$ und $\sigma = 1_V$ gilt.

"$\Longleftarrow$" Sei $i \in \{1, \ldots, t\}$. Dann folgt aus $\mathbf{s_i} = \mathbf{s}'_\mathbf{i}$ und $\mathbf{w} = \mathbf{w}'$ die Gleichheit $f_i = f'_i$, also $\langle \mathbf{a} - \mathbf{a}', \mathbf{s_i} \rangle = \kappa\varepsilon f_i - \kappa'\varepsilon' f'_i = 0$. Es folgt $\langle \mathbf{a} - \mathbf{a}', V_0 \rangle = 0$, und daher $\mathbf{a} - \mathbf{a}' \in \mathrm{Rad}\, V$.

"$\Longrightarrow$" Sei $\mathbf{a}' = \mathbf{a} + n\mathbf{w}$ und $\mathbf{s_i}' = \mathbf{u_i} + n_i\mathbf{w}$, wobei $\mathbf{u_i}$ eine Wurzel ist, die in der Röhre liegt, die vom $\tau$-Orbit von $\mathbf{s_i}$ aufgespannt wird. Sei $\mathbf{u_i} = \sum_{j=0}^{p_i-1} m_i^{(j)}\tau^j\mathbf{s_i}$. Wegen $\langle \mathbf{a}', \mathbf{s_i}'\rangle > 0$ und $\langle \mathbf{a}', \tau^j\mathbf{s_i}'\rangle = 0$ $(j = 1, \ldots, p_i - 1)$ folgt

$$n_i > -\frac{m_i^{(0)}\langle \mathbf{a}, \mathbf{s_i}\rangle}{\kappa\varepsilon}$$

und

$$n_i = -\frac{m_i^{(j)}\langle \mathbf{a}, \mathbf{s_i}\rangle}{\kappa\varepsilon} \quad (j = 1, \ldots, p_i - 1).$$

Da $\mathbf{u_i}$ eine Wurzel ist, folgt (nach [**30**, Prop. 5.2]) $|m_i^{(j)} - m_i^{(0)}| = 1$, also $m_i^{(0)} = m_i^{(j)} + 1$ $(j = 1, \ldots, p_i - 1)$. Es folgt

$$\mathbf{s_i}' = \mathbf{s_i} + \left(n_i + m_i^{(1)}\frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{s_i}\rangle}{\kappa\varepsilon}\right)\mathbf{w} = \mathbf{s_i}.$$

□

Bemerkung. (1) Ist

$$\mathbf{a},\ \tau^j\mathbf{s_i}\ (1 \le i \le t,\ 0 \le j \le p_i - 2),\ \mathbf{w}$$

$\mathbf{w}$-kanonisch, und ist $\sigma_l$ definiert durch

$$\sigma_l(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \sum_{j=0}^{p_l-1} \frac{\langle \tau^j\mathbf{s_l}, \mathbf{x}\rangle}{\langle \mathbf{s_l}, \mathbf{s_l}\rangle}\tau^j\mathbf{s_l}$$

für jedes $\mathbf{x} \in V$, so ist auch

$$\sigma_l\mathbf{a},\ \tau^j\sigma_l\mathbf{s_i}\ (1 \le i \le t,\ 0 \le j \le p_i - 2),\ \mathbf{w}$$

$\mathbf{w}$-kanonisch.

(2) Aus (1) folgt: Ist

$$\mathbf{a},\ \tau^j(\tau^{j_i}\mathbf{s_i} + n_i\mathbf{w})\ (1 \le i \le t,\ 0 \le j \le p_i - 2),\ \mathbf{w}$$

$\mathbf{w}$-kanonisch, so gibt es eine $\mathbf{w}$-kanonische Basis der Form

$$\mathbf{a}',\ \tau^j\mathbf{s_i} + n_i\mathbf{w}\ (1 \le i \le t,\ 0 \le j \le p_i - 2),\ \mathbf{w}.$$

Nach A.2.8 ist dabei $\mathbf{a}'$ modulo $\mathbb{Z}\mathbf{w}$ eindeutig bestimmt.

Wir nehmen an, wir hätten in einem kanonischen Gitter neben

$$B: \qquad \mathbf{a},\ \tau^j\mathbf{s_i}\ (1 \le i \le t,\ 0 \le j \le p_i - 2),\ \mathbf{w}$$

eine weitere $\mathbf{w}$-kanonische Basis $B'$ gegeben. Nach dem bisher Gesagten können wir dabei annehmen, daß $B'$ die folgende Form hat:

$$B': \qquad \mathbf{a}',\ \tau^j\mathbf{s_i} + n_i\mathbf{w}\ (1 \le i \le t,\ 0 \le j \le p_i - 2),\ \mathbf{w}.$$

Ferner hat $\mathbf{a}'$ o. E. die folgende Gestalt:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} + \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=0}^{p_i-2} \alpha_{ij}\tau^j\mathbf{s_i}.$$

LEMMA A.2.9. *Unter obigen Voraussetzungen gilt*

$$\alpha_{ij} = (p_i - 1 - j) n_i \frac{e_i}{f_i}$$

*und*

$$\langle \mathbf{a}', \mathbf{a}' \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle + \kappa\varepsilon \sum_{i=1}^{t} (p_i - 1) n_i e_i + \kappa\varepsilon \sum_{i=1}^{t} n_i^2 \frac{e_i}{f_i} \frac{p_i(p_i - 1)}{2}.$$

BEWEIS. Folgt durch Berechnung von $\langle \mathbf{a}', \tau^j \mathbf{s_i} + n_i \mathbf{w} \rangle$. □

PROPOSITION A.2.10. *$\kappa$ und $\varepsilon$ sind Invarianten des kanonischen Gitters $(V, \mathbf{w})$ bzgl. Rangisomorphie.*

BEWEIS. Mit obigen Bezeichnungen kann man $\kappa = \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle$ und $\kappa' = \langle \mathbf{a}', \mathbf{a}' \rangle$ setzen. Mit der Formel aus dem vorherigen Lemma folgt $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \mid \langle \mathbf{a}', \mathbf{a}' \rangle$, und wegen $\kappa\varepsilon = \kappa'\varepsilon'$ folgt auch die umgekehrte Teilbarkeitsbeziehung, also $\kappa = \kappa'$, was dann auch $\varepsilon = \varepsilon'$ nach sich zieht. □

Die folgende Eindeutigkeitsaussage ist für den Begriff der kommutativen Realisierbarkeit (Abschnitt 3.9) wichtig.

LEMMA A.2.11. *Sei $(V, \mathbf{w})$ ein kanonisches Gitter, welches ein $\mathbf{w}$-Symbol hat, in dem $e_i = 1$ gilt für alle $i = 1, \dots, t$. Dann ist dieses Symbol das einzige $\mathbf{w}$-Symbol.*

BEWEIS. Sei wie oben $B$ eine $\mathbf{w}$-kanonische Basis, die das Symbol mit $e_i = 1$ liefert, und $B'$ eine weitere $\mathbf{w}$-kanonische Basis. Mit obigen Bezeichnungen folgt dann $e_i' \geq e_i$ für alle $i = 1, \dots, t$, und da die Brüche $\frac{e_i}{f_i}$ invariant sind, folgt auch $f_i' \geq f_i$, also $n_i \geq 0$ für alle $i = 1, \dots, t$. Wegen $\langle \mathbf{a}', \mathbf{a}' \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle$ folgt dann aus der Formel in A.2.9 leicht $n_i = 0$ für alle $i = 1, \dots, t$. Dies zeigt $B = B'$, und somit folgt die Behauptung. □

BEISPIEL A.2.12. Wir zeigen, daß ein $\mathbf{w}$-Symbol im allgemeinen (d. h. im wilden Fall) *nicht* eindeutig zu sein braucht. Betrachte das kanonische Gitter $(V, \mathbf{w})$ mit einer $\mathbf{w}$-kanonischen Basis

$$\mathbf{a} \mid \mathbf{s_1} \mid \mathbf{s_2} \mid \mathbf{s_3} \mid \mathbf{s_4} \mid \mathbf{w},$$

die das $\mathbf{w}$-Symbol $\left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 2 & 2 & \\ 1 & 1 & 25 & 25 & \varepsilon \\ 1 & 1 & 5 & 5 & \end{array} \right)$ liefert. Man rechnet leicht nach, daß auch

$$\mathbf{a} + \mathbf{s_1} + \mathbf{s_2} - \mathbf{s_3} \mid \mathbf{s_1} + \mathbf{w} \mid \mathbf{s_2} + \mathbf{w} \mid \mathbf{s_3} - \mathbf{w} \mid \mathbf{s_4} \mid \mathbf{w}$$

eine $\mathbf{w}$-kanonische Basis ist mit $\mathbf{w}$-Symbol $\left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 2 & 2 & \\ 9 & 9 & 9 & 25 & \varepsilon \\ 3 & 3 & 3 & 5 & \end{array} \right)$. Dies ist ein Gegenbeispiel zu einem Ergebnis in [**30**].

## A.3. Anstiege und Rangfunktionen

In diesem Abschnitt sei $(V, \mathbf{w})$ ein tubulares kanonisches Gitter, $p$ das kleinste gemeinsame Vielfache der Gewichte und $\mathbf{a} \in V$ eine Wurzel vom Rang 1 in einer $\mathbf{w}$-kanonischen Basis.

LEMMA A.3.1. *Sei* $\mathbf{u} := \sum_{j=0}^{p-1} \tau^j \mathbf{a}$. *Dann ist* $\mathbf{u}$, $\mathbf{w}$ *eine* $\mathbb{Q}$-*Basis von* $\mathbb{Q} \otimes \operatorname{Rad} V$.

BEWEIS. Nach [**30**, Prop. 10.3] ist $\operatorname{Rad} V$ vom Rang 2, also ist $\mathbb{Q} \otimes \operatorname{Rad} V$ zweidimensional über $\mathbb{Q}$. Wegen $\operatorname{rk} \mathbf{u} = p$ und $\operatorname{rk} \mathbf{w} = 0$ sind $\mathbf{u}$ und $\mathbf{w}$ linear unabhängig. □

Sei $q \in \overline{\mathbb{Q}}$, $q = \frac{d}{r}$ mit $(d, r) = 1$, $r \geq 0$ und $\widetilde{\mathbf{w}}_{\mathbf{q}} = r \cdot \mathbf{u} + d \cdot \mathbf{w}$ und $\mathbf{w}_{\mathbf{q}}$ so, daß $\mathbb{Z}\mathbf{w}_{\mathbf{q}}$ eine 1-Röhre ist mit $\widetilde{\mathbf{w}}_{\mathbf{q}} \in \mathbb{N}\mathbf{w}_{\mathbf{q}}$.

KOROLLAR A.3.2. (1) *Die* 1-*Röhren von* $V$ *sind gerade die* $\mathbb{Z}\mathbf{w}_{\mathbf{q}}$ $(q \in \overline{\mathbb{Q}})$.
(2) *Die Rangfunktionen* (*modulo Vorzeichen*) *entsprechen den Elementen* $q \in \overline{\mathbb{Q}}$.

BEWEIS. Die Abbildung $q \mapsto \mathbb{Z}\mathbf{w}_{\mathbf{q}}$ liefert die Korrespondenz zwischen $\overline{\mathbb{Q}}$ und 1-Röhren: Sie ist offensichtlich injektiv. Surjektivität: Sei $\mathbb{Z}\mathbf{x}$ eine 1-Röhre. Dann ist $\mathbf{x} = \frac{a}{b}\mathbf{u} + \frac{c}{d}\mathbf{w} = \frac{1}{bd}(ad\mathbf{u} + bc\mathbf{w})$. Sei $e = (bc, ad)$, $em = bc$, $en = ad$. Sei $q = \mu\mathbf{x} = \frac{m}{n}$. Dann ist $\mathbf{w}_{\mathbf{q}}$ von der Form $\frac{1}{f}(n\mathbf{u} + m\mathbf{w})$ mit $(m, n) = 1$. Es folgt $ef\mathbf{w}_{\mathbf{q}} = bd\mathbf{x}$, und da beide, $\mathbf{x}$ und $\mathbf{w}_{\mathbf{q}}$, direkte Summanden erzeugen, folgt $\mathbb{Z}\mathbf{x} = \mathbb{Z}\mathbf{w}_{\mathbf{q}}$. □

DEFINITION A.3.3. Für jedes $q \in \overline{\mathbb{Q}}$ heißt der durch $\mathbf{w}_{\mathbf{q}}$ erzeugt Rang der *q-Rang*.

DEFINITION A.3.4. Sei $\mathbb{P}(\operatorname{Rad} V)$ die Menge aller direkten Rang 1 Summanden von $\operatorname{Rad} V$. Jedes $\sigma \in \operatorname{Aut} V$ induziert eine bijektive Abbildung $\overline{\sigma}$ von $\mathbb{P}(\operatorname{Rad} V)$ in sich. Dadurch operiert $\operatorname{Aut} V$ auf $\overline{\mathbb{Q}}$ (via $\sigma(\mathbf{w}_{\mathbf{q}}) = \pm \mathbf{w}_{\overline{\sigma}(q)}$). Seien $q$, $q' \in \overline{\mathbb{Q}}$. Wir nennen $q$ und $q'$ *äquivalent* ($q \sim q'$), falls es ein $\sigma \in \operatorname{Aut} V$ gibt mit $\sigma\mathbf{w}_{\mathbf{q}} = \mathbf{w}_{\mathbf{q}'}$. Dadurch wird auf der Menge $\overline{\mathbb{Q}}$ eine Äquivalenzrelation definiert, deren Klassen wir *Anstiegsklassen* (bzgl. $V$) nennen.

Der Begriff des *Anstiegs* wird im nächsten Abschnitt erklärt.

## A.4. Verschiebungsautomorphismen

Sei $(V, \mathbf{w})$ ein tubulares kanonisches Gitter mit Symbol

$$\left( \begin{array}{c|c} p_1, \ldots, p_t & \\ d_1, \ldots, d_t & \varepsilon \\ f_1, \ldots, f_t & \end{array} \right),$$

welches durch eine fixierte $\mathbf{w}$-kanonische Basis

$$\mathbf{a},\ \tau^j \mathbf{s_i}\ (1 \leq i \leq t,\ 0 \leq j \leq p_i - 2),\ \mathbf{w}$$

gegeben ist, und sei $p = \operatorname{kgV}(p_1, \ldots, p_t)$. Ferner sei $c = \varepsilon(V, \mathbf{w})$ der Index von $\langle V, \mathbf{w} \rangle$ in $\mathbb{Z}$ (also $c = \kappa\varepsilon$, mit $\kappa = \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle$).

Für alle $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in V$ sei

$$\langle\!\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle\!\rangle := \sum_{j=0}^{p-1} \langle \tau^j \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle.$$

Sei $\operatorname{rk} = \operatorname{rk}_{\mathbf{w}}$, und definiere eine Gradfunktion $\deg : V \longrightarrow \mathbb{Z}$ durch

$$\deg(\mathbf{x}) = \frac{1}{\kappa\varepsilon} \langle\!\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle\!\rangle$$

für jedes $\mathbf{x} \in \mathrm{K}_0(\mathbb{X})$. Damit wird dann für Elemente $\mathbf{x} \in V$, für die nicht $\deg \mathbf{x}$ und $\operatorname{rk} \mathbf{x}$ *beide* null sind, der *Anstieg* definiert durch $\mu(\mathbf{x}) = \frac{\deg(x)}{\operatorname{rk}(x)} \in \overline{\mathbb{Q}}$. Es gilt offenbar $\mu(\mathbf{w}_{\mathbf{q}}) = q$ für jedes $q \in \overline{\mathbb{Q}}$. Dieser Anstieg ist natürlich von der Auswahl von deg (bzw. $\mathbf{a}$) und rk (bzw. $\mathbf{w}$) abhängig. Wir definieren nun Verschiebungsautomorphismen (wie in [**30**]), und untersuchen, wie diese auf den Anstiegen wirken.

Sei
$$\sigma_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \frac{\langle \mathbf{w}, \mathbf{x}\rangle}{c}\mathbf{w}.$$
Es gilt $\deg \sigma_0(\mathbf{x}) = \deg \mathbf{x} + p \operatorname{rk} \mathbf{x}$, $\operatorname{rk} \sigma_0(\mathbf{x}) = \operatorname{rk} \mathbf{x}$, also $\mu\sigma_0(\mathbf{x}) = \mu\mathbf{x} + p$.

Sei für jedes $i = 1, \ldots, t$
$$\sigma_i(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \sum_{j=0}^{p_i-1} \frac{\langle \tau^j \mathbf{s_i}, \mathbf{x}\rangle}{\langle \mathbf{s_i}, \mathbf{s_i}\rangle}\tau^j \mathbf{s_i}.$$
Es gilt $\deg \sigma_i(\mathbf{x}) = \deg \mathbf{x} + d_i \frac{p}{p_i} \operatorname{rk} \mathbf{x}$, $\operatorname{rk} \sigma_i(\mathbf{x}) = \operatorname{rk} \mathbf{x}$, also $\mu\sigma_i(\mathbf{x}) = \mu\mathbf{x} + d_i\frac{p}{p_i}$.

Lemma A.4.1. *Es ist* $p = \min\{l \in \mathbb{N} \mid \tau^l \mathbf{a} = \mathbf{a}\}$.

Beweis. Nach [**30**, Thm. 8.3] ist $\tau^p$ die Identität. Sei $l \in \mathbb{N}$, so daß $\tau^l\mathbf{a} = \mathbf{a}$ gilt. Für jedes $i = 1, \ldots, t$ ist $\langle \mathbf{a}, \tau^j \mathbf{s_i}\rangle \neq 0$, genau wenn $j \equiv 0 \bmod p_i$. Daher wird $l$ von jedem $p_i$ geteilt, und es folgt die Behauptung. ☐

Sei
$$\sigma_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \sum_{j=0}^{p-1} \frac{\langle \tau^j \mathbf{a}, \mathbf{x}\rangle}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle}\tau^j \mathbf{a}.$$
Es gilt $\deg \sigma_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \deg \mathbf{x}$ und $\operatorname{rk} \sigma_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \operatorname{rk} \mathbf{x} - \varepsilon \deg \mathbf{x}$, also $\mu\sigma_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \frac{\mu\mathbf{x}}{1-\varepsilon\mu\mathbf{x}}$.

Sei $G = \{\overline{\sigma} \mid \sigma \in \operatorname{Aut} V\}$ die Untergruppe der Gruppe der bijektiven Abbildungen von $\overline{\mathbb{Q}}$ nach $\overline{\mathbb{Q}}$. Die fundamentale Frage, die uns interessiert, ist, wieviele Bahnen die Operation $G$ auf $\overline{\mathbb{Q}}$ hat. Dazu untersuchen wir zunächst spezielle Untergruppen von $G$, die von zwei Elementen erzeugt werden, und für die die entsprechende Frage vergleichsweise einfach zu beantworten ist. Danach ist das Problem für $G$ selbst nicht mehr schwierig zu lösen.

Sei $U$ die von $\sigma_0$, $\sigma_{\mathbf{a}}$ und von den $\sigma_i$ $(i = 1, \ldots, t)$ erzeugte Untergruppe von $G$ (Vereinbarung: $\infty = \frac{1}{0}$, $\frac{\infty}{\infty} = 1$). In den tubularen Fällen wird $U$ dann von zwei Elementen $\sigma$ und $\rho$ erzeugt, wobei ein Blick auf die Liste in [**30**] zeigt, daß folgende 5 Fälle auftreten können:

(1) $\sigma(q) = q + 1$, $\rho(q) = \frac{q}{1+q}$;
(2) $\sigma(q) = q + 2$, $\rho(q) = \frac{q}{1+q}$;
(3) $\sigma(q) = q + 3$, $\rho(q) = \frac{q}{1+q}$;
(4) $\sigma(q) = q + 1$, $\rho(q) = \frac{q}{1+2q}$;
(5) $\sigma(q) = q + 2$, $\rho(q) = \frac{q}{1+2q}$.

Bemerkung. Die Liste der tubularen Symbole [**30**] zeigt: Es gibt ein $i \in \{1, \ldots, t\}$ mit $p_i = p$ und $d_1\frac{p}{p_1}, \ldots, d_t\frac{p}{p_t} \in \mathbb{N}d_i\frac{p}{p_i}$.

Wir untersuchen nun die Bahnen dieser Untergruppe. Im ersten Fall weiß man, daß $U$ transitiv auf $\overline{\mathbb{Q}}$ operiert [**34**].

Um die Schreibweise zu vereinfachen, treffen wir im folgenden die Konvention, daß $q = \frac{a}{b} \in \overline{\mathbb{Q}}$ (o. ä.) immer heißen soll, daß $a$ und $b$ teilerfremd (insbesondere nicht beide $= 0$) sind. Das Symbol $\mathbb{N}$ stehe hier immer für die Menge der natürlichen Zahlen inklusive Null.

Da die folgenden Aussagen über die Anzahl der Bahnen von grundlegender Wichtigkeit sind, geben wir die Beweise größtenteils in ausführlicher Form an. Alle Beweise laufen nach demselben Schema, jedoch sind sie im Detail unterschiedlich.

Lemma A.4.2 (Fall 2). *Seien* $A = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N},\ a \text{ gerade}\}$ *und* $B = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N},\ a \text{ ungerade}\}$. *Seien* $\sigma$, $\rho \in G$, $\sigma(q) = q + 2$, $\rho(q) = \frac{q}{1+q}$. *Sei* $U$ *die von* $\sigma$ *und* $\rho$ *erzeugte Untergruppe von* $G$. *Dann ist* $A = U.0$, $B = U.1$.

Beweis. Offensichtlich sind $A$ und $B$ invariant unter $\rho$ und $\sigma$. Sei $q = \frac{d}{r} \in \overline{\mathbb{Q}}$ mit $d \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{N}$. Wir machen Induktion nach $|q| := |d| + r$.

1. $q \in A$: $|q| = 0$ ist nicht möglich. Aus $|q| = 1$ folgt $q = \frac{0}{1} = 0$. Sei nun $|q| > 1$.

1. Fall: $d > 0$. Dann ist $d = r$ oder $d = 2r$ nicht möglich.

a) $d < r$. Dann ist $q = \rho(q')$ mit $q' = \frac{d}{r-d} \in \mathbb{Q}_+$ und $|q'| = d + r - d = r < r + d = |q|$.

b) $d > 2r$. Dann ist $q = \sigma(q')$ mit $q' = \frac{d-2r}{r} \in \mathbb{Q}_+$ und $|q'| = d - 2r + r = d - r < d + r = |q|$.

c) $r < d < 2r$. Dann ist $q = \sigma(q')$ mit $q' = \frac{d-2r}{r} \in \mathbb{Q}_-$ und $|q'| = -d + 2r + r < 2r < r + d = |q|$.

2. Fall: $d < 0$. Dann ist $d = -r$ oder $d = -2r$ nicht möglich.

a) $d > -r$. Dann ist $q = \rho^{-1}(q')$ mit $q' = \frac{d}{r+d} \in \mathbb{Q}_-$ und $|q'| = -d + r + d = r < r - d = |q|$.

b) $d < -2r$. Dann ist $q = \sigma^{-1}(q')$ mit $q' = \frac{d+2r}{r} \in \mathbb{Q}_-$ und $|q'| = -d - 2r + r < -d + r = |q|$.

c) $-2r < d < -r$. Dann ist $q = \sigma^{-1}(q')$ mit $q' = \frac{d+2r}{r} \in \mathbb{Q}_+$ und $|q'| = d + 2r + r < 2r < -d + r = |q|$.

2. $q \in B$: $|q| = 0, 1$ ist nicht möglich. Ist $|q| = 2$, so ist $q = \pm 1$, und $-1 = \sigma^{-1}(1)$. Sei nun $|q| > 2$. Der Beweis verläuft dann völlig analog zu dem Fall $q \in A$, mit denselben Fallunterscheidungen. □

Lemma A.4.3 (Fall 3). *Seien* $A = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N},\ a \equiv 0 \bmod 3\}$, $B = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N},\ a \equiv 1 \bmod 3\}$ *und* $C = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N},\ a \equiv 2 \bmod 3\}$. *Seien* $\sigma$, $\rho \in G$, $\sigma(q) = q + 3$, $\rho(q) = \frac{q}{1+q}$. *Sei* $U$ *die von* $\sigma$ *und* $\rho$ *erzeugte Untergruppe von* $G$. *Dann ist* $A = U.0$, $B = U.1$ *und* $C = U.2$.

Beweis. Wir übernehmen die Bezeichnungen aus dem Beweis von A.4.2.

1. $q \in A$: Dann ist $|q| = 0$ nicht möglich. Aus $|q| = 1$ folgt $q = \frac{0}{1} = 0$. Sei nun $|q| > 1$.

1. Fall: $d > 0$. Dann ist $d = r$ nicht möglich.

a) $d < r$. Dann ist $q = \rho(q')$ mit $q' = \frac{d}{r-d} \in \mathbb{Q}_+$ und $|q'| = d + r - d < r + d = |q|$.

b) $d > r$.

(i) $d \geq 3r$. Dann ist $q = \sigma(q')$ mit $q' = \frac{d-3r}{r}$ und $|q'| = d - 2r < d + r = |q|$.

(ii) $2r \leq d < 3r$. Dann ist $q = \sigma(q')$ mit $q' = \frac{d-3r}{r}$ mit $|q'| = -d + 4r \leq 2r < d + r = |q|$.

(iii) $r < d < 2r$. Dann ist $q = \rho(q')$ mit $q' = -dd - r$ und $|q'| = d + d - r < d + r = |q|$.

2. Fall: $d < 0$. Dies verläuft völlig analog zum ersten Fall, indem man $\rho^{-1}$ und $\sigma^{-1}$ anwendet.

Die Fälle <u>2. $q \in B$</u> und <u>3. $q \in C$</u> verlaufen analog; nur der Induktionsanfang ist anzupassen. $\square$

LEMMA A.4.4 (Fall 4). *Seien $A = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{N}_0,\ b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0,\ b$ gerade$\}$ und $B = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{N}_0,\ b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0,\ b$ ungerade$\}$. Seien $\sigma,\ \rho \in G$, $\sigma(q) = q+1$, $\rho(q) = \frac{q}{1+2q}$. Sei $U$ die von $\sigma$ und $\rho$ erzeugte Untergruppe von $G$. Dann ist $A = U.\frac{1}{2}$, $B = U.0$.*

BEWEIS. Der Beweis verläuft analog zu dem Beweis von A.4.2. $\square$

LEMMA A.4.5 (Fall 5). *Seien $A = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N},\ a$ ungerade, $b$ ungerade$\}$, $B = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N},\ a$ ungerade, $b$ gerade$\}$ und $C = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N},\ a$ gerade$\}$, $b$ ungerade. Seien $\sigma,\ \rho \in G$, $\sigma(q) = q+2$, $\rho(q) = \frac{q}{1+2q}$. Sei $U$ die von $\sigma$ und $\rho$ erzeugte Untergruppe von $G$. Dann ist $A = U.1$, $B = U.\frac{1}{2}$ und $C = U.2$.*

BEWEIS. Wir übernehmen die Bezeichnungen aus dem Beweis von A.4.2. Wir schreiben nur den Fall "$d > 0$" auf. Die Fälle $q \in A$, $q \in B$ und $q \in C$ unterscheiden sich nur im Induktionsanfang. Für den Induktionsschritt hat man folgende Fälle, wobei $r > 0$ angenommen werden kann (sonst ist $q$ in der Bahn von $\frac{1}{2}$):

a) $d < \frac{1}{r}$. Dann ist $q = \rho(q')$ mit $q' = \frac{d}{r-2d}$ und $|q'| = d + r - 2d < d + r = |q|$.
b) $d = \frac{1}{2}r$. Dann ist $q = \frac{1}{2}$.
c) $\frac{1}{2}r < d < r$. Dann ist $q = \rho q'$ mit $q' = \frac{d}{r-2d}$ und $|q'| = d - r + 2d < 2d < d + r = |q|$.
d) $d = r$. Dann ist $q = 1$.
e) $r < d < 2r$. Dann ist $q = \sigma(q')$ mit $q' = \frac{d-2r}{r}$ und $|q'| = -d + 2r + r < 2r < d + r = |q|$.
f) $d = 2r$. Dann ist $q = 2$.
g) $d > 2r$. Dann ist $q = \sigma(q')$ mit $q' = \frac{d-2r}{r}$ und $|q'| = d - 2r + r < d + r = |q|$.

$\square$

BEMERKUNG. Ein einheitlicher Beweis obiger Aussagen wäre wünschenswert.

Sei $\sigma : \overline{\mathbb{Q}} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$, $q \mapsto q+1$ und $\rho : \overline{\mathbb{Q}} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$, $q \mapsto \frac{q}{q+1}$. Man könnte versuchen, zu zeigen, daß die Bahnen der durch $\rho^m$ und $\sigma^n$ erzeugten Gruppe in $\overline{\mathbb{Q}}$ durch

$$A_{ij} = \{\frac{a}{b} \mid a \equiv i \bmod n,\ b \equiv j \bmod m\},$$

wobei $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$ und $(i,j) = 1$ gilt, gegeben sind:

Sei $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. $S$ (bzw. $R$) operiert durch

$$\begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \frac{a}{b} := \frac{ca + db}{ea + fb}$$

wie $\sigma$ (bzw. $\rho$) auf $\overline{\mathbb{Q}}$. Für $m,\ n \in \mathbb{N}$ wäre dann eine Formel für den Index von der durch $R^m$ und $S^n$ erzeugten Untergruppe in der Modulargruppe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ von Nutzen. Ein aussichtsreicher Versuch könnte sein, modulo $\mathrm{kgV}(m,n)$ in endlichen Gruppen zu rechnen. Uns ist nicht bekannt, ob eine derartige Indexformel in der Literatur vorkommt.

## A.5. Die Anstiegsklassen der tubularen Gitter

Ein Symbol ist ein Zahlenschema, welches zu einer kanonischen Basis eines kanonischen Gitters definiert wurde. Wir nennen zwei Symbole $\sigma$ und $\sigma'$ *äquivalent*, falls sie durch kanonische Basen $B$ bzw. $B'$ innerhalb *eines* kanonischen Gitters $V$ realisiert werden können. Wir erinnern daran, daß, wenn $V$ tubular ist, es Bijektionen gibt zwischen der Menge der Symbole auf $V$, der Menge der Ähnlichkeitsklassen der Ränge auf $V$ und der Menge der Anstiegsklassen (bzgl. $V$) von $\overline{\mathbb{Q}}$.

Satz A.5.1. *Die Äquivalenzklassen der tubularen Symbole und die Anzahlen der Anstiegsklassen werden durch die Tabelle A.1 beschrieben. Es gibt maximal* 2 *Anstiegsklassen. Es gibt eine Untergruppe $U$ von* $\operatorname{Aut} V$*, die von Verschiebungsautomorphismen an Elementen, die in der vierten Spalte der Tabelle A.1 aufgelistet sind, erzeugt wird, so daß $U$ transitiv auf den Anstiegsklassen operiert.*

Die Untergruppe von $\operatorname{Aut} V$, die durch die Verschiebungsautomorphismen $\sigma_{\mathbf{a}}$, $\sigma_0 = \sigma_{\mathbf{w}}$, $\sigma_1, \ldots, \sigma_t$ erzeugt wird, muß nicht notwendig transitiv auf den Anstiegsklassen operieren.

Ein Blick auf die Gewichtssequenzen und die Determinanten der Cartanmatrizen zeigt, daß keine weiteren Symbole zueinander äquivalent sein können (vgl. A.2.2). Satz A.5.1 wird im folgenden bewiesen. Dabei werden auch die Anstiegsklassen in den jeweiligen Fällen ermittelt.

Im folgenden sei $(V, \mathbf{w})$ ein (normalisiertes) tubulares kanonisches Gitter. Es wird zu jedem tubularen kanonischen Gitter $V$ und zu jedem $q \in \overline{\mathbb{Q}}$ eine kanonische Basis (vgl. A.2.1, mit $\mathbb{Z}\mathbf{w} = \mathbb{Z}\mathbf{w_q}$) gefunden, die nach A.2.1 und A.2.6 ein eindeutiges Symbol definiert, und wir nennen dies das $q$-Symbol. Die kanonischen Basen werden dabei in der folgenden Weise notiert:

$$B: \qquad \mathbf{a} \mid \mathbf{s_1}, \tau\mathbf{s_1}, \ldots, \tau^{p_1-2}\mathbf{s_1} \mid \cdots \mid \mathbf{s_t}, \tau\mathbf{s_t}, \ldots, \tau^{p_t-2}\mathbf{s_t} \mid \mathbf{w}.$$

$B$ bezeichne eine kanonische Basis, die auf dem (zu untersuchenden) kanonischen Gitter durch $\mathbf{w}$ vorgegeben ist. Dann bezeichne $\mathbf{u}$ stets $\sum_{j=0}^{p-1} \tau^j \mathbf{a}$, wobei $p = \operatorname{kgV}(p_1, \ldots, p_t)$ ist.

In jedem der Fälle wird die Anzahl der Bahnen einer gewissen Untergruppe von $\operatorname{Aut} V$, die durch eine Teilmenge der Verschiebungsautomorphismen $\sigma_{\mathbf{a}}$, $\sigma_0 = \sigma_{\mathbf{w}}$, $\sigma_1, \ldots, \sigma_t$ aus Abschnitt A.4 erzeugt wird, eine obere Schranke für die Anzahl der Anstiegsklassen liefern. Eine untere Schranke wird man mit A.2.6 erhalten.

In den Fällen $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $(2\ 3\ 6)$, $(2\ 4\ 4)$, $(3\ 3\ 3)$, $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $(2\ 2\ 2\ 2)$ liefern die Verschiebungen an $\mathbf{a}$ und einem $\mathbf{s_i}$ den Fall 1 aus Abschnitt A.4, es gibt also nur eine Anstiegsklasse, $\overline{\mathbb{Q}}$ selbst.

A.5.2. **Der Fall** $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Die Verschiebungen an $\mathbf{a}$ und $\mathbf{w}$ liefern hier den Fall 2 aus Abschnitt A.4, also gibt es maximal 2 Anstiegsklassen mit Repräsentanten $q = 0$

| Symbol | Anst.-kl. | $\langle \mathbf{s_i}, \mathbf{s_i} \rangle$ | Erz. v. $U$ | $\det C$ | $\kappa\varepsilon$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \left(\begin{array}{c\|c} 2 & \\ 2 & 2 \\ 2 & \end{array}\right)$ | 2 | 1<br>4 | $\mathbf{a}, \mathbf{w}$<br>$\mathbf{a}, \mathbf{s_1}, \mathbf{u} - 2\mathbf{w}$ | 16 | 4, 2 |
| $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ | 1 | 1 | $\mathbf{a}, \mathbf{w}, \frac{1}{2}(\mathbf{u} + 2\mathbf{w})$ | 1 | 1 |
| $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \left(\begin{array}{c\|c} 2 & \\ 2 & 2 \end{array}\right)$ | 2 | 4<br>1 | $\mathbf{a}, \mathbf{w}$<br>$\mathbf{s_1}, \frac{1}{2}(\mathbf{u} + \mathbf{w})$ | 4 | 1, 2 |
| $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ | 2 | 1<br>3 | $\mathbf{a}, \mathbf{s_1}, \mathbf{a} + \mathbf{w}$ | 9 | 3, 1 |
| $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ | 1 | 3, 1 | $\mathbf{a}, \mathbf{s_1}$ | 27 | 3 |
| $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ | 1 | 1, 3 | $\mathbf{a}, \mathbf{s_1}$ | 3 | 1 |
| $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ | 2 | 1, 1<br>2, 2 | $\mathbf{a}, \mathbf{s_1}$ | 4 | 2, 1 |
| $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, (2\ 2 \mid 2)$ | 2 | 1, 4<br>2, 2 | $\mathbf{a}, \mathbf{s_1}$ | 16 | 2, 2 |
| $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ | 2 | 2, 1<br>1, 2 | $\mathbf{a}, \mathbf{s_2}$ | 8 | 2, 1 |
| $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ | 1 | 2, 1 | $\mathbf{a}, \mathbf{s_1}$ | 16 | 2 |
| $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ | 1 | 1, 2 | $\mathbf{a}, \mathbf{s_1}$ | 4 | 1 |
| $(2\ 3\ 6)$ | 1 | 1, 1, 1 | $\mathbf{a}, \mathbf{s_3}$ | 1 | 1 |
| $(2\ 4\ 4)$ | 1 | 1, 1, 1 | $\mathbf{a}, \mathbf{s_2}$ | 1 | 1 |
| $(3\ 3\ 3)$ | 1 | 1, 1, 1 | $\mathbf{a}, \mathbf{s_1}$ | 1 | 1 |
| $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ | 1 | 2, 2, 1 | $\mathbf{a}, \mathbf{s_1}$ | 16 | 2 |
| $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ | 1 | 1, 1, 2 | $\mathbf{a}, \mathbf{s_1}$ | 2 | 1 |
| $(2\ 2\ 2\ 2)$ | 1 | 1, 1, 1, 1 | $\mathbf{a}, \mathbf{s_1}$ | 1 | 1 |

TABELLE A.1. Klassen tubularer Symbole

und $q = \infty$. $q = 0$: Basis

$$B_0 : \qquad -\mathbf{s_1} \mid \tau\mathbf{a} \mid \frac{1}{2}\mathbf{u},$$

und 0-Symbol $\left(\begin{array}{c|c} 2 & \\ 2 & 2 \\ 2 & \end{array}\right)$.

Nach A.2.6 gibt es genau 2 Anstiegsklassen, nämlich

$$\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N},\ a \text{ gerade}\}$$
$$\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N},\ a \text{ ungerade}\}.$$

A.5.3. **Der Fall** $\left(\begin{array}{c|c} 2 & \\ 2 & 2 \\ 2 & \end{array}\right)$. Die Verschiebungen an $\mathbf{a}$ und $\mathbf{s_1}$ (oder $\mathbf{w}$) liefern den Fall 5 aus Abschnitt A.4, es gibt also maximal 3 Anstiegsklassen mit Repräsentanten $q = 0$, $q = 1$ und $q = \infty$. $q = 0$: Basis

$$B_0 : \qquad -\mathbf{s_1} \mid \tau\mathbf{a} \mid \mathbf{u},$$

und 0-Symbol $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$q = 1$: Basis

$$B_1 : \qquad \mathbf{a} \mid 2\mathbf{a} + \mathbf{w} \mid \mathbf{u} + \mathbf{w},$$

und das 1-Symbol ist gleich dem $\infty$-Symbol.

Verschiebung an der von $\mathbf{u} - 2\mathbf{w}$ erzeugten 1-Röhre,

$$\sigma_{\mathbf{u}-2\mathbf{w}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \frac{\langle \mathbf{u} - 2\mathbf{w}, \mathbf{x}\rangle}{4}(\mathbf{u} - 2\mathbf{w}),$$

induziert auf den Anstiegen $q \mapsto \frac{3q+4}{-q-1}$ und verbindet damit die Anstiegsklassen, die 1 bzw. $\infty$ enthalten, und darum gibt es genau 2 Anstiegsklassen:

$$\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N},\ a \text{ ung.},\ b \text{ ung.}\} \cup \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N},\ a \text{ ung.},\ b \text{ ger.}\}$$
$$\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N},\ a \text{ gerade},\ b \text{ ungerade}\}.$$

A.5.4. **Der Fall** $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$. Die Verschiebungen an $\mathbf{a}$ und $\mathbf{w}$ liefern hier den Fall 2 aus Abschnitt A.4, also gibt es maximal zwei Anstiegsklassen mit Repräsentanten $q = 0$ und $q = \infty$. $q = 0$: Basis

$$B_0 : \qquad -\mathbf{s_1} \mid \tau\mathbf{a} \mid \frac{1}{2}\mathbf{u},$$

und das 0-Symbol ist gleich dem $\infty$-Symbol.

Verschiebung an der durch $\frac{1}{2}(\mathbf{u} + 2\mathbf{w})$ erzeugten 1-Röhre,

$$\sigma_{\frac{1}{2}(\mathbf{u}+2\mathbf{w})}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \frac{\langle \mathbf{u} + 2\mathbf{w}, \mathbf{x}\rangle}{4}(\mathbf{u} + 2\mathbf{w}),$$

induziert auf den Anstiegen $q \mapsto \frac{4}{4-q}$, verbindet also die Anstiegsklassen, die 0 bzw. 1 (und damit $\infty$) enthalten, also gibt es genau 1 Anstiegsklasse.

A.5.5. **Der Fall** $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$. Die Verschiebungen an $\mathbf{a}$ und $\mathbf{w}$ liefern den Fall 2 aus Abschnitt A.4, also gibt es maximal 2 Anstiegsklassen mit Repräsentanten $q = 0$ und $q = \infty$. $q = 0$: Basis

$$B_0 : \qquad \mathbf{a} - \mathbf{w} \mid \mathbf{a} \mid \mathbf{u},$$

0-Symbol $\left( \begin{array}{c|c} 2 & \\ 2 & 2 \end{array} \right)$.

Also gibt es genau 2 Anstiegsklassen:

$$\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N},\ a \text{ gerade}\}$$
$$\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N},\ a \text{ ungerade}\}.$$

A.5.6. **Der Fall** $\left( \begin{array}{c|c} 2 & \\ 2 & 2 \end{array} \right)$. Die Verschiebungen an $\mathbf{a}$ und $\mathbf{s_1}$ (oder $\mathbf{w}$) liefern den Fall 5 aus Abschnitt A.4, es gibt also maximal 3 Anstiegsklassen mit Repräsentanten $q = 0$, $q = -1$ und $q = \infty$. $q = 0$: Basis

$$B_0 : \qquad -\mathbf{s_1} \mid \tau\mathbf{a} \mid \mathbf{u},$$

liefert $\infty$-Symbol.

$q = -1$: Basis

$$B_{-1} : \qquad \mathbf{s_1} \mid -2\mathbf{a} + 4\mathbf{s_1} - \mathbf{w} \mid \frac{1}{2}(\mathbf{w} - \mathbf{u}),$$

und $-1$-Symbol $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Verschiebung an der von $\frac{1}{2}(\mathbf{u} + \mathbf{w})$ erzeugten 1-Röhre,

$$\sigma_{\frac{1}{2}(\mathbf{u}+\mathbf{w})}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \frac{\langle \mathbf{u} + \mathbf{w}, \mathbf{x} \rangle}{4}(\mathbf{u} + \mathbf{w}),$$

induziert auf den Anstiegen $q \mapsto \frac{1}{2-q}$, und damit sieht man, daß $\infty$ mittels Verschiebungsautomorphismen in 0 übergeht. Daher gibt es genau 2 Anstiegsklassen:

$$\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N},\ a, b \text{ ungerade}\}$$
$$\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N},\ a \text{ ger.},\ b \text{ ung.}\} \cup \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N},\ a \text{ ung.},\ b \text{ ger.}\}.$$

Ferner sieht man, daß schon die Verschiebungen an $\mathbf{s_1}$ und $\frac{1}{2}(\mathbf{u}+\mathbf{w})$ diese 2 Anstiegsklassen liefern. Man beachte noch, daß $\mu(\frac{1}{2}(\mathbf{u} + \mathbf{w})) = 1$ ist und daß das 1-Symbol $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ ist.

A.5.7. **Der Fall** $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$. Die Verschiebungen an $\mathbf{a}$ und $\mathbf{s_1}$ liefern den Fall 3 aus Abschnitt A.4, also gibt es maximal 3 Anstiegsklassen mit Repräsentanten $q = 0$,

$q = -1$ und $q = \infty$. $q = 0$: Basis

$B_0$ : $$-\mathbf{s_1} \mid \tau\mathbf{a}, \tau^2\mathbf{a} \mid \frac{1}{3}\mathbf{u},$$

und 0-Symbol $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$q = -1$: Basis

$B_{-1}$ : $$-\mathbf{a} \mid \tau\mathbf{a} - \tau\mathbf{s_1}, \tau^2\mathbf{a} - \tau^2\mathbf{s_1} \mid \mathbf{u} - \mathbf{w},$$

und das $-1$-Symbol ist gleich dem $\infty$-Symbol.

Verschiebung an der durch $\mathbf{a} + \mathbf{w}$ erzeugten 3-Röhre,

$$\sigma_{\mathbf{a}+\mathbf{w}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \sum_{j=0}^{2} \frac{\langle \tau^j\mathbf{a} + \mathbf{w}, \mathbf{x}\rangle}{3}(\tau^j\mathbf{a} + \mathbf{w}),$$

induziert auf den Anstiegen $q \mapsto \frac{-2q+9}{-q+4}$, insbesondere $5 \mapsto \frac{-1}{-1} = 1$. Da 1 in der selben Klasse wie $\infty$ und 5 in derselben Klasse wie $-1$ liegt, folgt, daß es genau 2 Anstiegsklassen gibt:

$$\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N},\ a \equiv 0 \bmod 3\}$$

$$\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N},\ a \equiv 1 \bmod 3\} \cup \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N},\ a \equiv 2 \bmod 3\}.$$

A.5.8. **Der Fall** $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$. Die Verschiebungen an $\mathbf{a}$ und $\mathbf{s_1}$ liefern den Fall 3 aus Abschnitt A.4, also gibt es maximal 3 Anstiegsklassen mit Repräsentanten $q = 0$, $q = -1$ und $q = \infty$. $q = 0$: Basis

$B_0$ : $$-\mathbf{s_1} \mid \tau\mathbf{a}, \tau^2\mathbf{a} \mid \mathbf{u},$$

und 0-Symbol $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$q = -1$: Basis

$B_{-1}$ : $$-\mathbf{a} \mid 3\tau\mathbf{a} - \tau\mathbf{s_1}, 3\tau^2\mathbf{a} - \tau^2\mathbf{s_1} \mid \mathbf{u} - \mathbf{w},$$

und das $-1$-Symbol ist gleich dem $\infty$-Symbol.

Verschiebung an der durch $\mathbf{a} + \mathbf{w}$ erzeugten 3-Röhre,

$$\sigma_{\mathbf{a}+\mathbf{w}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \sum_{j=0}^{2} \langle \tau^j\mathbf{a} + \mathbf{w}, \mathbf{x}\rangle(\tau^j\mathbf{a} + \mathbf{w}),$$

induziert auf den Anstiegen $q \mapsto \frac{-2q+9}{-q+4}$, insbesondere $5 \mapsto \frac{-1}{-1} = 1$. Da 1 in derselben Klasse wie $\infty$ und 5 in derselben Klasse wie $-1$ liegt, folgt, daß es genau 2 Anstiegsklassen gibt:

$$\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N},\ a \equiv 0 \bmod 3\}$$

$$\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N},\ a \equiv 1 \bmod 3\} \cup \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N},\ a \equiv 2 \bmod 3\}.$$

A.5.9. **Der Fall** $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Die Verschiebungen an $\mathbf{a}$ und $\mathbf{s_1}$ liefern den Fall 2 aus Abschnitt A.4, also gibt es maximal 2 Anstiegsklassen mit Repräsentanten $q = 0$ und $q = \infty$. $q = 0$: Basis

$$B_0 : \qquad -\mathbf{s_1} \mid \tau\mathbf{a} \mid \tau\mathbf{a} - 2\tau\mathbf{s_1} + \mathbf{w} \mid \frac{1}{2}\mathbf{u},$$

und 0-Symbol $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Es gibt also genau 2 Anstiegsklassen

$$\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N},\ a \text{ gerade}\}$$
$$\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N},\ a \text{ ungerade}\}.$$

A.5.10. **Der Fall** $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Die Verschiebungen an $\mathbf{a}$ und $\mathbf{s_1}$ liefern den Fall 2 aus Abschnitt A.4, also gibt es maximal 2 Anstiegsklassen mit Repräsentanten $q = 0$ und $q = \infty$. $q = 0$: Basis

$$B_0 : \qquad \mathbf{s_1} - 2\mathbf{w} \mid \mathbf{a} \mid \mathbf{a} - \mathbf{s_2} + \mathbf{w} \mid \mathbf{u},$$

und 0-Symbol $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Daher gibt es genau 2 Anstiegsklassen, nämlich

$$\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N},\ a \text{ gerade}\}$$
$$\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N},\ a \text{ ungerade}\}.$$

A.5.11. **Der Fall** $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Die Verschiebungen an $\mathbf{a}$ und $\mathbf{s_1}$ liefern den Fall 2 aus Abschnitt A.4, also gibt es maximal 2 Anstiegsklassen mit Repräsentanten $q = 0$ und $q = \infty$. $q = 0$: Basis

$$B_0 : \qquad \mathbf{s_1} - \mathbf{w} \mid \mathbf{a} - \mathbf{s_2} + \mathbf{w} \mid \mathbf{a} \mid \mathbf{u},$$

und 0-Symbol $(2\ 2 \mid 2)$.

Also gibt es genau 2 Anstiegsklassen, wiederum

$$\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N},\ a \text{ gerade}\}$$
$$\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N},\ a \text{ ungerade}\}.$$

A.5.12. **Der Fall** $(2\ 2 \mid 2)$. Die Verschiebungen an $\mathbf{a}$ und $\mathbf{s_1}$ liefern den Fall 4 aus Abschnitt A.4, also gibt es maximal 2 Anstiegsklassen mit Repräsentanten $q = 0$ und $q = \infty$. $q = 0$: Basis

$$B_0 : \qquad -\mathbf{s_2} \mid \tau\mathbf{a} \mid 2\tau\mathbf{a} - 2\tau\mathbf{s_1} + \mathbf{w} \mid \mathbf{u},$$

und 0-Symbol $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Daher gibt es genau 2 Anstiegsklassen, nämlich

$$\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N},\ b \text{ gerade}\}$$
$$\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N},\ b \text{ ungerade}\}.$$

A.5.13. **Der Fall** $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Die Verschiebungen an $\mathbf{a}$ und $\mathbf{s_2}$ liefern den Fall 2 aus Abschnitt A.4, also gibt es maximal 2 Anstiegsklassen mit Repräsentanten $q = 0$ und $q = \infty$. $q = 0$: Basis

$$B_0 : \qquad -\mathbf{s_2} \mid \mathbf{a} - 2\mathbf{s_2} - \tau\mathbf{s_2} - \tau^2\mathbf{s_2} + \mathbf{w} \mid \tau\mathbf{a}, \tau^2\mathbf{a}, \tau^3\mathbf{a} \mid \frac{1}{2}\mathbf{u},$$

und 0-Symbol $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Also gibt es genau 2 Anstiegsklassen:

$$\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N},\ a \text{ gerade}\}$$
$$\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N},\ a \text{ ungerade}\}.$$

A.5.14. **Der Fall** $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Die Verschiebungen an $\mathbf{a}$ und $\mathbf{s_2}$ liefern den Fall 2 aus Abschnitt A.4, also gibt es maximal 2 Anstiegsklassen mit Repräsentanten $q = 0$ und $q = \infty$. $q = 0$: Basis

$$B_0 : \qquad -\tau^3\mathbf{s_2} \mid 2\mathbf{a} - 2\mathbf{s_1} - \mathbf{s_2} - \tau\mathbf{s_2} + 2\mathbf{w} \mid \mathbf{a}, \tau\mathbf{a}, \tau^2\mathbf{a} \mid \mathbf{u},$$

und 0-Symbol $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Es gibt damit genau 2 Anstiegsklassen:

$$\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N},\ a \text{ gerade}\}$$
$$\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N},\ a \text{ ungerade}\}.$$

ANHANG B

# Die Picard-Gruppe

## B.1. Der Beweis von Proposition 1.2.5

Wir beweisen Proposition 1.2.5, indem wir den Cokern des Monomorphismus $H \longrightarrow \mathrm{Pic}^H(\mathbb{X})$ untersuchen. Wir nehmen an, daß die $H$-graduierte kommutative $k$-Algebra die Bedingungen **(N)**, **(F2)** und **(F3)** erfüllt. Dabei ist $k$ ein Körper.

Sei $K = \mathrm{Quot}^H(R)$ der graduierte Quotientenkörper von $R$. Sei $I$ ein graduierter $R$-Modul. $I$ heißt *graduiertes gebrochenes Ideal*, falls es ein $h \in H$ gibt, so daß $I(h)$ ein homogener $R$-Untermodul von $K$ ist, und falls es ein homogenes $d \in R \setminus \{0\}$ gibt mit $dI(h) \subset R$. (Entsprechend werden *graduierte divisorielle gebrochene Ideale* definiert.) $I$ heißt *graduiertes gebrochenes Hauptideal*, falls es ein $h \in H$ gibt, so daß $I(h)$ ein homogener $R$-Untermodul von $K$ ist, und falls es ein homogenes $f \in K$ gibt mit $I(h) = Rf$. In diesem Sinn ist z. B. für jedes $h \in H$ der graduierte $R$-Modul $R(h)$ ein graduiert gebrochenes Hauptideal.

Die Menge der graduierten divisoriellen gebrochenen Ideale ist modulo $H$ bijektiv zur Menge $\mathrm{Div}^H(R)$ der homogenen Divisoren

$$\sum_{\mathrm{ht}\,\mathfrak{p}=1} n_{\mathfrak{p}} \cdot \mathfrak{p}.$$

Die *Divisorenklassengruppe* $\mathrm{Cl}^H(R)$ ist $\mathrm{Div}^H(R)/\,\mathrm{P}^H(R)$, wobei $\mathrm{P}^H(R)$ die Untergruppe der graduierten Hauptdivisoren ist, also der Divisoren von der Form $\mathrm{div}(f)$ für ein homogenes $f \in K$ (von beliebigem Grad!). Sie ist isomorph zur Faktorgruppe der graduierten divisoriellen gebrochenen Ideale modulo der graduierten gebrochenen Hauptideale.

Proposition B.1.1. (1) *$R$ ist graduiert faktoriell, genau wenn jedes homogene Primideal der (graduierten) Höhe 1 von einem homogenen Primelement erzeugt wird, und dies ist äquivalent dazu, daß $\mathrm{Cl}^H(R) = 0$ ist.*

(2) *Die Zuordnung $h \mapsto \mathcal{O}(h)$ $(h \in H)$ liefert eine exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow H \longrightarrow \mathrm{Pic}^H(\mathbb{X}) \longrightarrow \mathrm{Cl}^H(R) \longrightarrow 0,$$

*wobei die zweite Abbildung induziert wird durch die Zuordnung $\mathcal{L} \mapsto \Gamma(\mathbb{X},\mathcal{L}) = \bigoplus_{h\in H} \mathrm{Hom}_{\mathbb{X}}(\mathcal{O},\mathcal{L}(h))$.*

Beweis. (1) Ist $R$ graduiert faktoriell und $\mathfrak{p}$ ein homogenes Primideal der Höhe 1, so sei $0 \neq r \in \mathfrak{p}$ homogen. Zerlege $r$ in Primfaktoren. Dann muß mindestens ein Primfaktor $p$ in $\mathfrak{p}$ liegen, und daher ist $\mathfrak{p} = Rp$. Die Umkehrung folgt mit einer graduierten Version des Krullschen Hauptidealsatzes: Sei $p \in R$ ein homogenes irreduzibles Element in $R$. Zu zeigen genügt, daß $p$ prim ist. Sei $\mathfrak{p}$ ein minimales homogenes Primoberideal von $p$. Dann hat $\mathfrak{p}$ die Höhe 1, ist also ein Hauptideal, also $\mathfrak{p} = Rq$, wobei $q$ prim ist. Dann folgt, daß auch $p$ prim ist.

Gilt die mittlere Bedingung, so folgt offenbar $\mathrm{Cl}^H(R) = 0$. Gelte umgekehrt $\mathrm{Cl}^H(R) = 0$. Sei $\mathfrak{p}$ ein homogenes Primideal der Höhe 1. Dann gibt es ein homogenes $f \in K$ mit $\mathrm{div}(f) = \mathrm{div}(\mathfrak{p})$. Dann folgt wegen

$$R = \bigcap_{\mathrm{ht}\,\mathfrak{p}=1} R_{\mathfrak{p}}$$

wie in [**22**, II. Prop. 6.2], daß $f \in R$ ist und $\mathfrak{p} = Rf$.

(2) (vgl. auch [**36**, Thm. 1.3], [**37**, Thm. 1.9].)

Sei $\mathcal{L}$ ein Linienbündel. Dann ist $I = \Gamma(\mathbb{X}, \mathcal{L})$ ein graduierter Cohen-Macaulay Modul vom Rang 1. Da $I$ CM ist, ist $I$ graduiert reflexiv, und daher ein divisorielles gebrochenes Ideal (in $K = \mathrm{Quot}^H(R)$). Ist $\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}(h)$ für ein $h \in H$, so ist $I$ offenbar ein gebrochenes Hauptideal. Sei umgekehrt $I$ ein gebrochenes Hauptideal. Dann ist $I$ graduiert projektiv und vom Rang 1, also $I \simeq R(h)$, also $\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}(h)$ für ein $h \in H$. $\square$

ANHANG C

# Zahme Bimoduln

## C.1. Multiplizitätenfreie rationale Punkte

Wir betrachten zahme Bimoduln $M = {}_GM_F$, wobei $F$ und $G$ endlichdimensionale Schiefkörper über dem Grundkörper $k$ sind. Auf $F$, $G$ und $M$ operiere $k$ stets zentral. Dabei bedeutet *zahm*, daß $\dim_G M \cdot \dim M_F = 4$ gilt. Das Paar $(\dim_G M, \dim M_F)$ heißt der *Typ* von $M$ (vgl. [**10**]).

$M$ ist die zahm-erbliche $k$-Algebra $\Lambda = \begin{pmatrix} F & 0 \\ M & G \end{pmatrix}$ zugeordnet. Dies ist insbesondere eine versteckt-kanonische Algebra, wobei die reguläre Komponente eine separierende tubulare Familie definiert, deren Röhren alle homogen sind. Wir verwenden dieselben Bezeichnungen wie in Abschnitt 4.2. Wir untersuchen hier die Existenz von Punkten $y \in \mathbb{Y}$ in der zugeordneten Kurve, die rational und multiplizitätenfrei sind, so daß also $e(y) = 1 = f(y)$ gilt.

Lemma C.1.1. *Sei $\mathbb{Y}$ eine homogene exzeptionelle Kurve, so daß der unterliegende zahme Bimodul nicht-einfach ist. Dann gibt es einen rationalen Punkt $y \in \mathbb{Y}$, der multiplizitätenfrei ist, d. h. es gilt $f(y) = 1$ und $e(y) = 1$.*

Beweis. Es gibt einen solchen Punkt nach [**38**, Thm. 7.4]. □

Lemma C.1.2. *Sei ${}_FM_G$ einer zahmer Bimodul vom Typ $(2,2)$. Dieser ist genau dann nicht-einfach, wenn es über der zugehörigen homogenen Kurve $\mathbb{Y}$ einen rationalen multiplizitätenfreien Punkt $y \in \mathbb{Y}$ gibt.*

Beweis. Ist $M$ nicht-einfacher Bimodul, so gibt es einen rationalen multiplizitätenfreien Punkt nach C.1.1. Der zugehörige einfache reguläre Modul $S$ ist Cokern der exakten Folge

$$0 \longrightarrow P_1 \xrightarrow{f} P_2 \longrightarrow S \longrightarrow 0,$$

wobei $P_1$ und $P_2$ die beiden Projektiven vom Rang 1 sind und $f$ eine irreduzible Abbildung.

Sei $M$ einfacher Bimodul. Seien $P_1$ und $P_2$ die unzerlegbar projektiven Darstellungen, so daß es einen irreduziblen Morphismus von $P_1$ nach $P_2$ gibt. Dann sind alle einfachen regulären Darstellungen $S_y$ mit $f(y) = 1$ Cokerne nicht-trivialer (also irreduzibler) Morphismen $P_1 \longrightarrow P_2$. Sei $S_y$ eine einfache reguläre Darstellung mit $f(y) = 1$. Wir können annehmen, daß $S_y$ von der Form $(F, G, \varphi)$ ist, wobei $\varphi : F \otimes M \longrightarrow G$ ein $G$-linearer Epimorphismus ist. Es gibt ein $y \in M$, $y \neq 0$, mit

Kern $\varphi = 1 \otimes yG$. Hat man nun einen Endomorphismus

$$\begin{tikzcd} F \otimes M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\cdot f"'] & G \arrow[d, "\cdot g"] \\ F \otimes M \arrow[r, "\varphi"] & G \end{tikzcd}$$

gegeben, so muß $fyG \subset yG$ gelten. Wegen der Einfachheit von $M$ ist der Ring $R = \{f \in F \mid fyG \subset yG\} \neq F$. Wegen $[M : G] > 1$ gilt andererseits $\mathrm{End}(S_y) \simeq R$. Es folgt $e(y) = \frac{[F:k]}{[\mathrm{End}(S_y):k]} > 1$. □

## C.2. Einfache reguläre Darstellungen über $\mathbb{R}$

Die folgende Tabelle beschreibt die Symboldaten der einfachen regulären Darstellungen der zahmen Bimoduln $M = {}_G M_F$ vom Typ $(2, 2)$ über dem Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen. Die Daten sind [**10**] und [**14**] entnommen.

Ist $D$ die $\mathbb{R}$-Algebra, die in der zweiten Spalte angegeben ist, so ist die Kategorie der regulären Darstellung äquivalent zu $\mathrm{mod}(D) \times \mathcal{U}_S$, wobei $\mathrm{mod}(D)$ die Kategorie aller $D$-Rechtsmoduln bezeichnet, die endlichdimensional über $F$ sind, und wobei $\mathcal{U}_S$ eine einreihige Kategorie ist mit genau einem einfachen Element $S$ ([**38**, Thm. 7.4]).

Die einfachen regulären Darstellungen $S_x \neq S$ korrespondieren mit Elementen $p_x$ in $D$, wie sie in der zweiten Spalte angegeben sind.

In der dritten Spalte wird der Isomorphietyp der einfachen regulären Darstellungen $S_x$ (bzw. der von $S_x^2$) angeben.

In der letzten Spalte wird zu einer einfachen regulären Darstellung $S_x$ deren *Symbol* $\begin{pmatrix} \begin{matrix} d(x) \\ f(x) \end{matrix} & \mathrm{End}(S_x) \end{pmatrix}$ angegeben.

Die Daten $f(x)$ und $d(x)$ berechnen sich wie folgt: Zunächst entnimmt man aus [**14**] die Zahlen $e(x)$, wobei $D/p_xD \simeq \mathrm{M}_{e(x)}(D_x)$ mit einem Schiefkörper $D_x$. Es gilt $S_x^{e(x)} \simeq D/p_xD$ und $\mathrm{End}\, S_x \simeq D_x$. Dann berechnet man $d(x) = \frac{[\mathrm{M}_{e(x)}(D_x):\mathbb{R}]}{[F:\mathbb{R}]}$, und schließlich $f(x) = \frac{d(x)}{e(x)}$. Man sieht leicht, daß diese Daten mit denen aus 4.2 übereinstimmen.

Die einfache reguläre Darstellung $S$ hat jeweils dieselben Symboldaten wie sie in a) angegeben sind ([**38**, Thm. 7.4]).

| Bimodul | $D,\ p_x$ | $S_x$ | $\left(\begin{array}{c} d(x) \\ f(x) \end{array} \quad \mathrm{End}(S_x)\right)$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{R} \xrightarrow{\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}} \mathbb{R}$ | $\mathbb{R}[T],\ T$ zentral | | |
| | a) $T-a \quad (a\in\mathbb{R})$ | $\mathbb{R}$ | $\left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \quad \mathbb{R}\right)$ |
| | b) $(T-a)(T-\bar{a})$ $(a\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})$ | $\mathbb{C}$ | $\left(\begin{array}{c} 2 \\ 2 \end{array} \quad \mathbb{C}\right)$ |
| $\mathbb{C} \xrightarrow{\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}} \mathbb{C}$ | $\mathbb{C}[T],\ T$ zentral | | |
| | $T-a \quad (a\in\mathbb{C})$ | $\mathbb{C}$ | $\left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \quad \mathbb{C}\right)$ |
| $\mathbb{H} \xrightarrow{\mathbb{H}\oplus\mathbb{H}} \mathbb{H}$ | $\mathbb{H}[T],\ T$ zentral | | |
| | a) $T-a \quad (a\in\mathbb{R})$ | $\mathbb{H}$ | $\left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \quad \mathbb{H}\right)$ |
| | b) $(T-a)(T-\bar{a})$ $(a\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})$ | $S_x^2 \simeq \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ | $\left(\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \quad \mathbb{C}\right)$ |
| $\mathbb{C} \xrightarrow{\mathbb{C}\oplus\overline{\mathbb{C}}} \mathbb{C}$ | $\mathbb{C}[T,\overline{\cdot}],\ Tc=\bar{c}T \quad (c\in\mathbb{C})$ | | |
| | a) $T$ | $\mathbb{C}$ | $\left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \quad \mathbb{C}\right)$ |
| | b) $T^2-a \quad (0<a\in\mathbb{R})$ | $S_x^2 \simeq \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ | $\left(\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \quad \mathbb{R}\right)$ |
| | c) $T^2-a \quad (0>a\in\mathbb{R})$ | $\mathbb{H}$ | $\left(\begin{array}{c} 2 \\ 2 \end{array} \quad \mathbb{H}\right)$ |
| | d) $(T^2-a)(T^2-\bar{a})$ $(a\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})$ | $S_x^2 \simeq \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ | $\left(\begin{array}{c} 4 \\ 2 \end{array} \quad \mathbb{C}\right)$ |

TABELLE C.1. $(2,2)$-Fälle über $\mathbb{R}$

# Literaturverzeichnis


[1] S. A. Amitsur, *Generic splitting fields of central simple algebras*, Ann. of Math. **62** (1955), 8–43.

[2] J. K. Arason, R. Elman, und B. Jacob, *On indecomposable vector bundles*, Comm. Algebra **20** (5) (1992), 1323–1351.

[3] M. F. Atiyah, *Vector bundles over an elliptic curve*, Proc. London Math. Soc. **3** (7) (1957), 414–452.

[4] D. Baer, *Einige homologische Aspekte der Darstellungstheorie Artinscher Algebren*, Dissertation, Paderborn 1983.

[5] D. Baer, W. Geigle, und H. Lenzing, *The preprojective algebra of a tame hereditary artin algebra*, Comm. Algebra **15** (1987), 425–457.

[6] M. Barot, *Representation-finite derived tubular algebras*, Vorabdruck 1997.

[7] A. Bondal und D. Orlov, *Reconstruction of a variety from the derived category and groups of autoequivalences*, Vorabdruck 1997.

[8] W. W. Crawley-Boevey, *Regular modules for tame hereditary algebras*, Proc. London Math. Soc. **62** (3) (1991), 490–508.

[9] V. Dlab, *The regular representations of the tame hereditary algebras*, Séminaire d`Algèbre Paul Dubreil et Marie-Paul Malliavin, Proceedings, Paris 1982 (35ème Année) (M.-P. Malliavin, Hrsg.), Lecture Notes in Math., Bd. 1029, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1983, 120–133.

[10] V. Dlab und C. M. Ringel, *Indecomposable representations of graphs and algebras*, Mem. Amer. Math. Soc., Nr. 173, American Mathematical Society, 1976.

[11] ______, *Real subspaces of a quaternion vector space*, Canad. J. Math. **30** (6) (1978), 1228–1242.

[12] ______, *The representations of tame hereditary algebras*, Representation Theory of Algebras. Proceedings of the Philadelphia Conference 1976 (New York) (R. Gordon, Hrsg.), Marcel Dekker, 1978, 329–353.

[13] ______, *The preprojective algebra of a modulated graph*, Representation Theory II (Ottawa 1979), Lecture Notes in Math., Bd. 832, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1980, 216–231.

[14] V. B. Dlab, *An introduction to diagrammatical methods in representation theory*, Vorlesungen aus dem Fachbereich Mathematik der Universität Essen, Heft 7, Universität Essen, 1981.

[15] P. Dowbor, W. Geigle, und H. Lenzing, *Graded sheaf theory and group quotients with applications to representations of finite dimensional algebras*, Manuskript, Paderborn 1988.

[16] R. M. Fossum, *The divisor class group of a Krull domain*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Bd. 74, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1973.

[17] P. Gabriel, *Indecomposable representations II*, Symposia Mat. Inst. Alta Mat. **11** (1973), 81–104.

[18] W. Geigle und H. Lenzing, *A class of weighted projective curves arising in representation theory of finite dimensional algebras*, Singularities, Representation of Algebras and Vector Bundles (Lambrecht 1985), Lecture Notes in Math., Bd. 1273, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1987, 265–297.

[19] ______, *Perpendicular categories with applications to representations and sheaves*, J. Algebra **144** (1991), 273–343.

[20] D. Happel, *Triangulated categories in the representation theory of finite dimensional algebras*, London Math. Soc. Lecture Note Series, Bd. 119, Cambridge University Press, 1988.

[21] D. Happel und C. M. Ringel, *The derived category of a tubular algebra*, Representation Theory I. Finite Dimensional Algebras (Ottawa 1984), Lecture Notes in Math., Bd. 1177, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1986, 156–180.

[22] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1977.

[23] T. Hübner, *Exzeptionelle Vektorbündel und Reflektionen an Kippgarben über projektiven gewichteten Kurven*, Dissertation, Paderborn 1996.

[24] D. Kussin, *Graded factorial algebras of dimension two*, erscheint in: Bull. London Math. Soc.

[25] ———, *Factorial algebras, quaternions and preprojective algebras*, erscheint in: Representation Theory of Algebras (Geiranger, 1996), Canadian Math. Soc. Conf. Proc.

[26] T. Y. Lam, *The algebraic theory of quadratic forms*, W. A. Benjamin, Inc., Reading, Massachusetts, 1973.

[27] H. Lenzing, *Hereditary noetherian categories with a tilting complex*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (7) (1997), 1893–1901.

[28] ———, *Curve singularities arising from the representation theory of tame hereditary artin algebras*, Representation Theory I. Finite Dimensional Algebras (Ottawa 1984), Lecture Notes in Math., Bd. 1177, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1986, 199–231.

[29] ———, *The factorization property*, Vorabdruck, Paderborn 1996.

[30] ———, *A K-theoretic study of canonical algebras*, Representation Theory of Algebras (Cocoyoc, 1994) (R. Bautista, R. Martínez-Villa, und J. A. de la Peña, Hrsg.), Canadian Math. Soc. Conf. Proc., Bd. 18, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1996, 433–473.

[31] ———, *Representations of finite dimensional algebras and singularity theory*, Vorabdruck, Paderborn 1996.

[32] H. Lenzing und J. A. de la Peña, *Concealed-canonical algebras and separating tubular families*, erscheint in: Proc. London Math. Soc.

[33] ———, *Wild canonical algebras*, Math. Z. **224** (1997), 403–425.

[34] H. Lenzing und H. Meltzer, *Sheaves on a weighted projective line of genus one, and representations of a tubular algebra*, Representations of Algebras (Ottawa 1992) (V. Dlab und H. Lenzing, Hrsg.), Canadian Math. Soc. Conf. Proc., Bd. 14, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1993, 313–337.

[35] ———, *Tilting sheaves and concealed-canonical algebras*, Representation Theory of Algebras (Cocoyoc, 1994) (R. Bautista, R. Martínez-Villa, und J. A. de la Peña, Hrsg.), Canadian Math. Soc. Conf. Proc., Bd. 18, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1996, 455–473.

[36] S. Mori, *On affine cones associated with polarized varieties*, Japan. J. Math. **1** (2) (1975), 301–309.

[37] ———, *Graded factorial domains*, Japan. J. Math. **3** (2) (1977), 223–238.

[38] C. M. Ringel, *Representations of K-species and bimodules*, J. Algebra **41** (1976), 269–302.

[39] ———, *Tame algebras and integral quadratic forms*, Lecture Notes in Math., Bd. 1099, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1984.

[40] ———, *The canonical algebras with an appendix by William Crawley-Boevey*, Topics in Algebra, Banach Center Publ., Bd. 26, 1990, 407–432.

[41] ———, *Recent advances in the representation theory of finite dimensional algebras*, Representation Theory of Finite Groups and Finite-Dimensional Algebras (G. O. Michler und C. M. Ringel, Hrsg.), Progress in Mathematics, Bd. 95, Birkhäuser Verlag, Basel, 1991, 141–192.

[42] W. Scharlau, *Quadratic and hermitian forms*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 270, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1985.

[43] G. Scheja und U. Storch, *Zur Konstruktion faktorieller graduierter Integritätsbereiche*, Arch. Math. **42** (1984), 45–52.

[44] ———, *Lehrbuch der Algebra. Teil 2*, B. G. Teubner, Stuttgart, 1988.

[45] J.-P. Serre, *A course in arithmetic*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1973.

[46] E. Witt, *Über ein Gegenbeispiel zum Normensatz*, Math. Z. **39** (1935), 462–467.

[47] Y. Yoshino, *Cohen-Macaulay modules over Cohen-Macaulay rings*, London Math. Soc. Lecture Notes Series, Bd. 146, Cambridge University Press, 1990.