IX. ÜBUNG ZUR LINEAREN ALGEBRA II

Abgabe: bis MI, 17. JUNI 2009, 11:00 UHR in die Kästen 109, 110 bzw. 119.

`http://math-www.upb.de/~dirk/Vorlesungen/LA-2/`

In jeder Aufgabe sind maximal 10 Punkte erreichbar. Es bezeichnet K immer den Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

1. Aufgabe: Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3;\mathbb{R}).$$

Man zeige, dass durch

$$\langle x \mid y \rangle \overset{def}{=} {}^t x A y$$

ein Skalarprodukt auf $V = \mathbb{R}^3$ definiert wird.

2. Aufgabe: Sei $(V, \langle - \mid - \rangle)$ ein K-Vektorraum mit Skalarprodukt, und sei $\| - \|$ die zugehörige Norm. Man zeige:

(a) Für alle $x,\, y \in V$ gilt

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big).$$

Was bedeutet die Gleichung anschaulich (etwa für $V = \mathbb{R}^2$)?

(b) Sei $K = \mathbb{R}$. Seien $x,\, y \in V$ mit $x,\, y \neq 0$. Man zeige:

$$x,\, y \text{ linear abhängig} \quad \Leftrightarrow \quad \sphericalangle(x,y) \in \{0, \pi\}.$$

Worin unterscheiden sich die beiden Fälle $\sphericalangle(x,y) = 0$ bzw. π?

3. Aufgabe: Sei $V = \mathbb{R}^2$ ausgestattet mit dem Standardskalarprodukt $(- \mid -)$. Seien $x,\, y \in V$ mit $x,\, y \neq 0$. Man zeige, dass für den (im anschaulichen Sinne) durch x und y aufgespannten Winkel α (wobei $0 \leq \alpha \leq \pi$) gilt

$$\cos\alpha = \frac{(x \mid y)}{\|x\| \cdot \|y\|}.$$

(Sie dürfen zur Argumentation aus der Schule bekannte trigonometrische Aussagen benutzen. Machen Sie eine Zeichnung. Vereinfachen Sie die allgemeine Situation durch geeignete Änderung der Lage der Vektoren x und y.)

4. Aufgabe: Sei $(V, \langle - \mid - \rangle)$ ein K-Vektorraum mit Skalarprodukt, seien U_1, $U_2 \subseteq V$ Unterräume. Man zeige:

(a) $(U_1 + U_2)^{\perp} = U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp}$.

(b) $U_1^{\perp} + U_2^{\perp} \subseteq (U_1 \cap U_2)^{\perp}$.

(c) Ist V endlichdimensional, so gilt in (b) Gleichheit.

5. Aufgabe: Sei $n \geq 2$, sei $K = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{R}^n$. Für

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

setze $N(x) \overset{def}{=} \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$.

(a) Man zeige, dass N eine *Norm* definiert, d. h. es gelten folgende Eigenschaften für alle x, $y \in V$, $\alpha \in K$:

(N1) $N(x) \geq 0$, und $N(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$;

(N2) $N(\alpha x) = |\alpha| \cdot N(x)$;

(N3) $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

(b) Man zeige, dass es *kein* Skalarprodukt $\langle - \mid - \rangle$ auf V gibt, welches N induziert.

(Hinweis: Aufgabe 2.)