XI. ÜBUNG ZUR LINEAREN ALGEBRA II

Abgabe: bis MI, 1. JULI 2009, 11:00 UHR in die Kästen 109, 110 bzw. 119.

`http://math-www.upb.de/~dirk/Vorlesungen/LA-2/`

In jeder Aufgabe sind maximal 10 Punkte erreichbar.

1. Aufgabe: Sei $A \in \mathrm{M}(n;\mathbb{R})$ eine orthogonale Matrix, die (aufgefasst als komplexe Matrix) nur reelle Eigenwerte hat. Man zeige, dass $A^{-1} = A$ gilt.

2. Aufgabe: Sei $(\mathbb{C}^3, (- \mid -))$ der dreidimensionale unitäre Raum mit dem Standardskalarprodukt. Sei $f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ der Endomorphismus, der durch $f(x) = Ax$ mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \\ 0 & -i/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3;\mathbb{C})$$

gegeben ist.

(a) Man zeige, dass f unitär ist.

(b) Man bestimme eine ONB von $\mathbb{C}^3$ bestehend aus Eigenvektoren von f.

(c) Man bestimme ein $S \in \mathrm{U}(3)$, so dass S^*AS eine Diagonalmatrix ist.

3. Aufgabe: Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$, und sei $z \overset{def}{=} x + iy \in \mathbb{C}^n$. Man zeige:

$$x,\, y \ \text{ linear unabhängig über } \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad z,\, \overline{z} \ \text{ linear unabhängig über } \mathbb{C}.$$

4. Aufgabe:

(a) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein Endomorphismus ohne reelle Eigenwerte. Man zeige, dass es eine Basis von $\mathbb{R}^2$ gibt, bzgl. welcher f dargestellt wird durch eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$, wobei $b \neq 0$.

(b) Man diskutiere, ob es ein ähnliches Ergebnis gibt, falls f reelle Eigenwerte hat.

(c) Man finde eine solche Basis für den Endomorphismus, der durch die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$ gegeben ist.

5. Aufgabe: Sei $(V, \langle - \mid - \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum mit $n = \dim(V)$. Für $a \in V$ mit $a \neq 0$ sei $s_a \colon V \to V$ die in Aufg. X.5 definierte Spiegelung, d. h.

$$s_a(x) \overset{def}{=} x - 2 \cdot \frac{\langle x \mid a \rangle}{\langle a \mid a \rangle} \cdot a \qquad \text{für jedes } x \in V.$$

(a) Man zeige: Für $a \in V$, $a \neq 0$ und für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ gilt $s_{\lambda a} = s_a$.

(Man kann also bei Spiegelungen s_a immer ohne Einschränkung $\|a\| = 1$ und damit $s_a(x) = x - 2\langle x \mid a \rangle a$ annehmen.)

(b) Ist s_a eine Spiegelung und $f \in \mathrm{O}(V)$, so ist $f^{-1} \circ s_a \circ f$ eine Spiegelung.

(c) Jedes $f \in \mathrm{O}(V)$ ist ein Produkt von Spiegelungen: $f = s_{a_k} \circ \ldots \circ s_{a_1}$, wobei $k \leq n$ gilt.

(d) In (c) gilt: $f \in \mathrm{SO}(V) \quad \Leftrightarrow \quad k$ gerade.

(Hinweis für (c): Zunächst für $n = 2$; dann Normalform für orthogonale Abbildungen.)