I. ÜBUNG zu GRUNDZÜGE der ALGEBRA

Abgabe: MI, 25. OKT. 2006, 11:00 UHR in den orangen Kasten Nr. **8**

`http://math-www.upb.de/~dirk/Vorlesungen/GZ-Algebra/`

1. Aufgabe: Sei n eine natürliche Zahl, $n > 0$. Sei $G = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$. Für $x, y \in G$ definiere

$$x * y = \begin{cases} x + y & \text{falls } x + y < n, \\ x + y - n & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man zeige:

a) $x * y$ ist die eindeutig definierte ganze Zahl mit $0 \le x * y \le n - 1$ und $x * y - (x + y) \in n\mathbb{Z}$.

b) $(G, *)$ ist eine abelsche Gruppe. 10 P.

2. Aufgabe: **a)** Jede Permutation[1] $\sigma \in S_n$ hat eine Darstellung $\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \ldots \circ \tau_p$ mit einem $p \le n$, wobei τ_i Transpositionen sind für $1 \le i \le p$. Ferner gilt $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^p$. (HINWEIS: Induktion nach n; betrachte zunächst alle Permutionen $\sigma \in S_n$ mit $\sigma(n) = n$.)

b) Man wende obigen Induktionsbeweis an, um $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in S_5$ in ein Produkt von Transpositionen zu zerlegen. Man zerlege anschließend σ in ein Produkt von Standardtranspositionen. 10 P.

3. Aufgabe: **a)** Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und U eine endliche und nicht-leere Teilmenge von G, die gegen Multiplikation abgeschlossen ist. Dann ist U eine Gruppe.

b) Die Menge, die aus den 8 Matrizen

$$\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

besteht, bildet mit der Matrizenmultiplikation eine Gruppe. (Hierbei ist i die imaginäre Einheit in $\mathbb{C}$.) 10 P.

[1] siehe Rückseite

Erinnerung an Permutationen: Sei M die Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$. Eine bijektive Abbildung $\sigma : M \longrightarrow M$ nennt man Permutation. Die Menge aller dieser Permutationen wird mit S_n bezeichnet. Mit der Komposition von Abbildungen als Verknüpfung ist S_n eine Gruppe.

Eine Permutation wird häufig in der Form

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

geschrieben.

Eine Transposition $(i\ j)$ (mit $i \neq j$) ist eine Permutation τ mit $\tau(i) = j$, $\tau(j) = i$ und $\tau(k) = k$ für $k \neq i, j$. Ist dabei $j = i + 1$, so heißt τ Standardtransposition.

Sei $\sigma \in S_n$. Die Matrix $P(\sigma) = (p_{ij})$ mit

$$p_{ij} = \delta_{i\sigma(j)} = \begin{cases} 1 & i = \sigma(j) \\ 0 & i \neq \sigma(j) \end{cases}$$

heißt die Permutationsmatrix zu σ.

Die Signatur $\operatorname{sgn}(\sigma)$ wird definiert als die Determinante von $P(\sigma)$.